

高速公路通行卡调配问题的数学模型及其解法

吴烈阳, 段进红, 黎川

(江西省高速公路联网管理中心, 江西 南昌 330036)

摘要: 由于高速公路联网里程不断增加和交通运输事业不断发展, 通行卡调配问题越来越复杂。合理的通行卡调配方案可降低运营成本、提高通行卡使用效率、减少运输费用。文中分析了通行卡在高速公路上的流通过程, 研究了通行卡调配问题的数学模型, 并应用线性规划表上作业法对该模型进行求解, 得出了通行卡调配问题的最优方案。

关键词: 公路交通; 高速公路; 通行卡调配; 数学模型; 表上作业法

中图分类号: U491

文献标志码: A

文章编号: 1671-2668(2017)01-0050-02

随着社会经济和交通运输事业的快速发展, 高速公路上通行车辆越来越多, 高速公路联网结构也越来越复杂。目前, 高速公路收费模式一般采用入口领卡、出口交卡缴费的方式(ETC 卡用户除外)。受区域经济和季节性运输等的影响, 各收费站的通行卡并不平衡, 即本站出口收回的通行卡数量不等于入口发出去的数量, 导致一些收费站通行卡积压、另一些收费站通行卡不足。合理地进行通行卡调配, 可减少调配开销、降低运营成本、提高通行卡使用效率。该文主要对高速公路通行卡调配问题进行分析, 设计通行卡调配数学模型并进行求解, 得出合理的调配方案。

1 高速公路通行卡调配问题描述

车辆通行高速公路的收费流程为在入口收费站领取通行卡(ETC 卡用户除外), 到目的收费站出口将通行卡交还给收费员, 收费员根据通行卡里的信息(入口时间、入口收费站、车型等)计算通行费金额, 车主缴纳通行费后抬杆放行。由此可见, 车辆通行高速公路的过程可看作是通行卡从入口收费站流入出口收费站的过程。出口收费站收回的通行卡在复位后可拿到本站入口重新发放。一般情况下, 一个收费站有入口也有出口, 但入口车流量并不一定等于出口车流量。当收费站入口车流量大于出口车流量时, 该收费站发出去的通行卡比收回来的通行卡多, 造成该站通行卡紧缺; 当收费站入口车流量小于出口车流量时, 该收费站发出去的通行卡比收回来的通行卡少, 造成该站通行卡盈余。高速公路各收费站出口和入口收卡、发卡不平衡, 对通行卡需求量不一, 需将通行卡从盈余的收费站调配至通行卡

紧缺的收费站。

早期的高速公路由于站点少、路网简单, 且没有联网, 车流量不大, 通行卡的调配相对较简单, 通常是相邻收费站或路段之间互相协调估计调配通行卡数量。随着高速公路建设的大发展, 高速公路联网规模越来越大、结构越来越复杂, 车流量也越来越大, 每天都要在复杂的高速公路网上调配大量通行卡。在这种复杂情况下, 传统的通行卡调配人工估算法效率低下, 越来越难以满足收费站对通行卡的调配需求。

2 高速公路通行卡调配问题数学建模

假设某高速公路网中有 n 个通行卡盈余收费站 $A_i, i \in [1, n]$, 其中 A_i 站盈余 a_i 张通行卡; 有 m 个通行卡紧缺收费站 $B_j, j \in [1, m]$, 其中 B_j 站紧缺 b_j 张通行卡。 l_{ij} 表示从 A_i 站到 B_j 站的距离(运输费用或时间), x_{ij} 表示从 A_i 站调配到 B_j 站的通行卡数量。下面研究通行卡从盈余站到紧缺站的调配方案, 使总的通行距离(运输费用或时间)最小。

首先定义变量 c_{ij} :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0 \\ 1, & x_{ij} \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: 变量 c_{ij} 用于确定 A_i 站到 B_j 站是否调配通行卡, 如果有调配则其值为 1, 如果无则其值为零。

建立满足上述要求的数学模型:

$$\min F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} l_{ij} \quad (2)$$

约束条件为:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j; j=1,2,\dots,m \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1,2,\dots\} \\ i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m \quad (5)$$

式(2)为目标函数,表示所求问题的最优解,即求解满足条件的最佳调配方案的最小距离(运输费用或时间)。约束条件中,式(3)和式(4)分别表示调配出站的通行卡数不大于本站盈余通行卡数、调配入站的通行卡数不大于本站紧缺通行卡数;式(5)为通行卡数 x_{ij} 的整数约束。

在高速公路通行卡调配中,如果调入和调出通行卡数量总量相等,则通行卡调配平衡,盈余通行卡和紧缺通行卡总量相等,即 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ 。如果调入和调出通行卡数量总量不相等,则通行卡调配不平衡,即 $\sum_{i=1}^n a_i \neq \sum_{j=1}^m b_j$,存在调入通行卡总数大于调出通行卡总数或调入通行卡总数小于调出通行卡总数两种情况。对于通行卡调配不平衡的情况,可将其化为平衡状态,增设虚拟收费站,使该虚拟收费站到任何收费站的距离均为零,根据情况确定为盈余型收费站或紧缺型收费站,其盈余通行卡或紧缺通行卡数量为 $\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right|$ 。

3 高速公路通行卡调配问题的解法

3.1 通行卡调配算例

假设有 A_1 、 A_2 和 A_3 3 个盈余通行卡收费站, B_1 、 B_2 、 B_3 和 B_4 4 个紧缺通行卡收费站,通行卡调配数量见表 1,收费站之间的距离见表 2。下面研究如何调配通行卡使总的运输距离最短。

表 1 通行卡调配平衡表 张

收费站	B_1	B_2	B_3	B_4	盈余量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	700
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	400
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	900
紧缺量	300	600	500	600	2 000

表 2 收费站之间的距离 km

收费站	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$l_{11}=7$	$l_{12}=11$	$l_{13}=9$	$l_{14}=16$
A_2	$l_{21}=15$	$l_{22}=12$	$l_{23}=13$	$l_{24}=7$
A_3	$l_{31}=10$	$l_{32}=9$	$l_{33}=14$	$l_{34}=8$

3.2 通行卡调配算例

从高速公路通行卡调配数学模型来看,该类问题在运筹学中称为线性规划问题——运输问题,运输问题经典的解法为表上作业法。应用表上作业法求解以上算例的步骤:

(1) 使用最小元素法计算初始调配方案,其可行解为 $x_{11}=300$ 张, $x_{13}=400$ 张, $x_{24}=400$ 张, $x_{32}=600$ 张, $x_{33}=100$ 张, $x_{34}=200$ 张(见表 3)。

表 3 通行卡调配平衡表(最小元素法) 张

收费站	B_1	B_2	B_3	B_4	盈余量
A_1	300		400		700
A_2				400	400
A_3		600	100	200	900
紧缺量	300	600	500	600	2 000

该调配方案的运输距离为:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} l_{ij} = l_{11} + l_{13} + l_{24} + l_{32} + l_{33} + l_{34} = 7 + 9 + 7 + 9 + 14 + 8 = 54 \text{ km}$$

(2) 使用闭回路法调整最优调配方案,求得最优解为 $x_{11}=200$ 张, $x_{13}=500$ 张, $x_{24}=400$ 张, $x_{31}=100$ 张, $x_{32}=600$ 张, $x_{34}=200$ 张(见表 4)。

表 4 通行卡调配平衡表(最优方案) 张

收费站	B_1	B_2	B_3	B_4	盈余量
A_1	200		500		700
A_2				400	400
A_3	100	600		200	900
紧缺量	300	600	500	600	2 000

最优调配方案的运输距离为:

$$\min F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} l_{ij} = l_{11} + l_{13} + l_{24} + l_{31} + l_{32} + l_{34} = 7 + 9 + 7 + 10 + 9 + 8 = 50 \text{ km}$$

该算例的通行卡最佳调配方案为表 4,最短运输距离为 50 km。

4 结语

关于高速公路通行卡调配问题,早期由于路网结构简单、里程较短、车流量变化较有规律,不需要较多的复杂计算,相关研究较少。随着高速公路联网规模的增大,路段业主单位越来越多,路网结构越

(下转第 75 页)

表 9 矿粉对沥青胶浆高温及疲劳性能影响较大的指标

沥青胶浆性能	对沥青胶浆性能影响较大的指标	
	基质沥青胶浆	高粘沥青胶浆
高温性能	比表面积;密度; P_{20} ;亲水系数; D_{10} ;细度模数	P_{20} ;亚甲蓝值;亲水系数;密度;比表面积; D_{10}
低温性能	密度;亲水系数;细度模数; D_{10} ; P_{20} ; D_{50}	细度模数; D_{10} ; 亲水系数;密度; P_{20} ; D_{50}
疲劳性能	比表面积; P_{20} ; 密度; 亲水系数; 细度模数; D_{10}	比表面积; 亲水系数; 密度; P_{20} ; D_{10} ; 细度模数

由表 9 可看出:对于基质沥青胶浆,密度、亲水系数、 P_{20} 、 D_{10} 及细度模数的关联度较大,表明其对基质沥青胶浆高温及疲劳等流变性能的影响较大,可作为评价矿粉的重要参考指标。比表面积对基质沥青胶浆低温性能的关联度相对较小,但其对高温性能及疲劳性能的关联度都是最大的,综合来看,比表面积可作为评价矿粉的参考指标。对于高粘沥青胶浆,密度、亲水系数、 P_{20} 及 D_{10} 的关联度较大,可作为评价矿粉的重要参考指标。比表面积在低温性能、细度模数在高温性能中的关联度都较小,但对其他流变性能都有较大影响,综合来看,这两个指标可作为参考指标。

基于灰色关联分析,得出密度、亲水系数、 P_{20} 、 D_{10} 、比表面积及细度模数可作为判别矿粉好坏的重要参考指标。

4 结论

(1) 不同矿粉对沥青胶浆流变性能的影响存在

较大差异,这与矿粉的物化性质有很大关系。高粘沥青胶浆的高温及疲劳性能都好于基质沥青胶浆,表现出其性能上的优越性。

(2) 矿粉的密度、亲水系数、 P_{20} 、 D_{10} 、比表面积及细度模数与沥青胶浆流变性能的关联度较大,可作为判别矿粉好坏的重要参考指标。

参考文献:

- [1] 刘丽.沥青胶浆技术性能及评价方法研究[D].西安:长安大学,2004.
- [2] 张争奇,王永财.沥青胶浆对沥青混合料高温性能的影响[J].长安大学学报:自然科学版,2006,26(2).
- [3] 袁燕.改性沥青胶浆的疲劳性能评价[D].广州:华南理工大学,2005.
- [4] 李智慧.沥青胶浆高温性能的评价研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2005.
- [5] 柳浩,李晓明,张肖宁.水泥与消石灰对沥青胶浆性能影响研究[J].北京工业大学学报,2009,35(11).
- [6] 张争奇,张卫平,李平.沥青混合料粉胶比[J].长安大学学报:自然科学版,2004,24(5).
- [7] 冯中良,王瑞强,曹荣吉,等.重复蠕变试验评价沥青高温性能的研究[J].中外公路,2007,27(1).
- [8] Anderson D A, Kennedy T W. Development of SHRP binder specification[J]. Journal of AAPT, 1993(15).
- [9] 邵显智,谭忆秋,孙立军.几种矿粉指标与沥青胶浆的关联分析[J].公路交通科技,2005,22(2).
- [10] 李涛,扈惠敏.矿粉对沥青胶浆性能的影响[J].合肥工业大学学报:自然科学版,2013,36(8).
- [11] 樊亮,魏建明,张玉贞,等.矿粉对沥青胶浆的性质影响及作用机理[J].建筑材料学报,2014,17(6).

收稿日期:2016-06-20

(上接第 51 页)

来越复杂,车流量随着季节等因素变化较大,通行卡的调配变得越来越复杂。该文主要研究了高速公路通行卡调配问题的数学模型,利用表上作业法求出了高速公路通行卡调配问题的解,得出了通行卡调配最佳方案。

参考文献:

- [1] 段进红.浅谈江西省高速公路通行卡管理问题分析[J].科技创新导报,2015(30).
- [2] 范宏达.高速公路通行卡管理系统的研究与分析[D].昆明:云南大学,2015.

- [3] 王润芳,时庆涛.车辆拥堵状态下的最优路径规划建模研究[J].计算机仿真,2016,33(2).
- [4] 刘伟铭,李荣荣,王超,等.高速公路通行卡调拨问题的遗传算法[J].广西师范大学学报:自然科学版,2016,34(1).
- [5] 党建武.神经网络在铁路空车调度问题中的应用[J].兰州铁道学院学报,1999,18(1).
- [6] 张伯生.运筹学[M].北京:科学出版社,2008.
- [7] 薛毅,耿美英.运筹学与实验[M].北京:电子工业出版社,2008.

收稿日期:2016-09-20