

## 含裂纹砼梁的自由振动分析

周露

(长沙理工大学 土木与建筑学院, 湖南 长沙 410004)

**摘要:** 基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 考虑裂纹产生的集中应力效应, 引入裂纹影响因子, 运用哈密顿变分原理建立了含裂纹砼梁的动力学控制方程; 将位移函数用 Chebyshev 正交多项式展开, 结合边界条件, 得到了含裂纹砼简支梁的特征向量方程; 通过数值分析, 研究了裂纹在不同位置和深度时对含裂纹梁各阶固有频率的影响。

**关键词:** 桥梁; 裂纹; 砼梁; 自由振动; Chebyshev 正交多项式; 固有频率

**中图分类号:** U441

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1671-2668(2017)04-0130-04

砼以其生产成本低、适应性强、耐久性好及应用方便等优点成为实际工程中最常见的建筑材料。但砼极易产生裂纹, 而裂纹的出现将导致结构承载力下降, 危及结构安全及使用寿命。因此, 研究含裂纹砼梁的动力学特性十分必要。王丹生等基于弯曲弹簧模型, 利用结构振动波传播理论对含裂纹砼梁的动力特性进行了研究。Yokoyama T. 等通过引入模拟裂纹的线弹簧模型, 研究了含裂纹的均匀 Euler-Bernoulli 砼梁的自由振动问题。张炜等将裂纹模拟为无质量的扭转弹簧, 通过递推方法研究了多种边界条件下含任意数量裂纹梁的振动特性。Ruoto-lo R. 等利用有限元模型研究了裂纹悬臂梁在简谐荷载作用下的动力响应。杨鄂川等采用裂纹梁连续等效刚度模型对轴向运动裂纹梁的横向振动特性进行了研究, 得到了裂纹梁的一阶和二阶固有频率数值解。李兆军等基于有限元位移模式建立了裂纹梁的动力方程, 研究了含裂纹构件梁结构的动态性能。苟兵旺等对轴向压力作用下简支裂纹梁和悬臂裂纹梁的振动特性进行了研究。该文引入裂纹影响因子描述裂纹附近应力、应变集中现象, 基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 采用哈密顿能量变分原理建立含裂纹砼梁的动力学控制方程, 通过数值计算, 对含裂纹砼梁的自由振动问题进行分析。

## 1 动力学控制方程

如图 1 所示, 含单裂纹砼简支梁的长度为  $l$ , 高度为  $d$ , 宽度为  $b$ ; 其外侧边缘有一横向裂纹, 裂纹距梁左端  $x_c$ , 裂纹深度为  $a$ 。

以便于分析, 假定所有材料为均匀弹性材料, 并作以下假定: 1) 应变沿截面高度线性变化; 2) 不

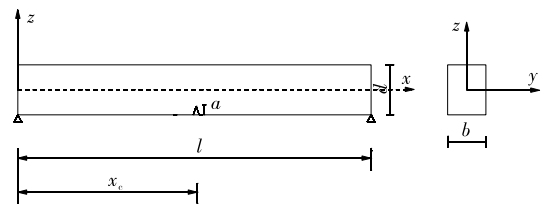


图 1 含裂纹砼简支梁示意图

考虑剪切效应; 3) 只考虑微小不扩展裂纹, 且裂纹不闭合, 裂纹沿梁宽度方向的开裂深度相同。基于以上假定, 含裂纹砼梁的几何方程和物理方程如下:

$$\begin{cases} u_c = -zw_{c,x}, v_{c,x} = 0, w_c = w(x, t) \\ \epsilon_{xx}^c = \frac{\partial u_c}{\partial x} = [-z + T_s \varphi(x, z)] \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy}^c = \epsilon_{zz}^c = 0 \\ \epsilon_{xy}^c = \epsilon_{yz}^c = \epsilon_{xz}^c = 0 \\ \sigma_{xx}^c = E_c \epsilon_{xx}^c = E_c [-z + T_s \varphi(x, z)] \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $u, w$  为梁在  $x$  和  $z$  方向的位移;  $E_c$  为砼弹性模量;  $T_s$  为裂纹影响因子, 梁上不存在裂纹时  $T_s = 0$ , 否则  $T_s = 1$ ;  $\varphi(x, t)$  为引进的裂纹影响因子函数, 其具有应力在裂纹尖端最大且沿梁轴向呈指数衰减的特征, 其表示形式见式(2)。

$$\varphi(x, z) = [z - m(z + \frac{a}{2})u(d - a - z)]e^{-a/d |x-x_c|} \quad (2)$$

式中:  $m$  为常数, 表示裂纹处应力沿横向线性变化的斜率, 对于不超过中心轴的微小裂纹, 忽略中性轴以上裂纹对应力、应变的影响, 其计算公式见式(3);  $u(d - a - z)$  为 Heaviside 函数, 其取值见式(4);  $\alpha$

为无量纲常数,表示裂纹尖端应力的衰减率,对于单裂纹梁, $\alpha=1.276$ 。

$$m = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{a}{d} + \frac{15}{4} \left(\frac{a}{d}\right)^2 - \frac{13}{8} \left(\frac{a}{d}\right)^3} \quad (3)$$

$$u(d-a-z) = \begin{cases} 1 & z < d-a \\ 0 & z \geq d-a \end{cases} \quad (4)$$

砧的动能和应变能表达式分别为:

$$T^c = \int_{V_c} \frac{1}{2} \rho_c \dot{w}_c^2 dv + \int_{V_c} \frac{1}{2} \rho_c \dot{u}_c^2 dv \quad (5)$$

$$U^c = \int_{V_c} \frac{1}{2} \sigma_{xx}^c \epsilon_{xx}^c dv \quad (6)$$

式中: $\rho_c$ 、 $V_c$  分别表示砧的密度和体积。

利用哈密顿能量变分原理建立含裂纹砧梁的动力学控制方程。将式(5)和式(6)代入砧梁的哈密顿能量变分方程:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V - U) dt = 0 \quad (7)$$

式中: $T$  为系统的总动能; $V$  为结构外力势能,对于自由振动, $V=0$ ; $U$  为系统的总应变能; $t$  为时间。

忽略式(5)中的第二项,则  $T$ 、 $U$  的表达式如下:

$$\begin{cases} T = T^c = \int_L \frac{1}{2} \rho_c A_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^2 dx \\ U = U^c = \iiint_{V_c} \frac{1}{2} \sigma_{xx}^c \epsilon_{xx}^c dx dy dz \end{cases} \quad (8)$$

式中: $A_c$  为砧截面积。

将式(8)代入式(7),得含裂纹砧梁的自由振动微分控制方程为:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [E_c f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] + [\rho_c A_c] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

$$\text{式中: } f(x) = \iint [-z + T_s \varphi(x, z)]^2 dx.$$

仅考虑谐波振动,采用分离变量法,设  $w(x, t) = W(x) T(t)$ 、 $T(t) = e^{i\omega t}$ ,并引入无量纲坐标  $\xi = x/L$ ,得:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \left[ \alpha_1 \frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial \xi^2} \right] - \alpha_2 \omega^2 L^4 W(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (10)$$

式中: $\alpha_1$  为关于变量  $\xi$  的函数,  $\alpha_1 = E_c f(\xi)$ ;  $\alpha_2$  为常数,  $\alpha_2 = \rho_c A_c$ 。

## 2 问题求解

式(10)为含变系数的高阶微分方程,直接求解难度较大。为此,采用文献[11]中提出的方法分析含单裂纹砧梁的自由振动问题。将  $W(\xi)$  以 Cheby-

shev 正交多项式展开,得:

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^N l_i T_i(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (11)$$

式中: $N$  为级数展开项数; $l_i$  是未知系数; $T_i(\xi)$  为 Chebyshev 多项式,其递推关系见式(12)。

$$T_1 = 1, T_2 = 2\xi - 1, T_i = 2(2\xi - 1)T_{i-1} - T_{i-2} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (12)$$

对于简支梁,其边界条件为:

$$W = 0, \frac{d^2 W}{d\xi^2} = 0 \quad (\xi = 0, 1)$$

将式(11)代入边界条件和式(10),在式(10)两边同时乘以  $\xi'(t=0, 1, \dots, N-5)$ ,并对  $\xi$  从 0 到 1 积分,得:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N l_i T_i(0) = 0, \sum_{i=1}^N l_i T_i'(0) = 0 \\ \sum_{i=1}^N l_i T_i(1) = 0, \sum_{i=1}^N l_i T_i'(1) = 0 \\ \sum_{j=1}^N [f_{ij} - \omega^2 g_{ij}] \cdot l_j = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, N-4) \end{cases} \quad (13)$$

式中:

$$\begin{cases} f_{ij} = \int_0^1 [\alpha_1 T_j^{(4)} + 2 \frac{d\alpha_1}{d\xi} T_j^{(3)} + \frac{d^2 \alpha_1}{d\xi^2} T_j^{(2)}] \cdot \xi^{i-1} dx \\ g_{ij} = \alpha_2 L^4 \int_0^1 T_i \cdot \xi^{i-1} dx \end{cases}$$

利用式(13),结合边界条件和控制方程得到如下封闭线性代数方程组:

$$(F - \omega^2 G) \cdot \{l\} = 0 \quad (14)$$

式中: $F = [f_{ij}]_{N \times N}$ ;  $G = [g_{ij}]_{N \times N}$ ;  $\{l\} = [l_i]_{N \times 1}$ 。

式(14)为含裂纹砧梁自由振动的特征向量方程。因该方程存在非零解,其系数矩阵行列式必须为零,即:

$$|F - \omega^2 G| = 0 \quad (15)$$

当  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  分别为已知函数和常数时,由式(15)可得关于固有频率的方程,从而求得含裂纹梁的固有频率。

## 3 数值算例

如图 1 所示,某含裂纹简支梁长度  $l = 1$  m,高度  $d = 0.05$  m,宽度  $b = 0.05$  m;砧的弹性模量  $E_c = 3 \times 10^4$  MPa,密度  $\rho_c = 2000$  kg/m<sup>3</sup>。按上述方法对其动力特性进行分析,位移函数按多项式展开的项

数  $N=12$ , 得到不同裂纹位置和深度时含裂纹砼梁的前三阶固有频率(见表 1~3), 并与文献[1]中结

果进行对比。

从表 1~3 可知: 裂纹位置和深度的改变对含裂

表 1 裂纹位置及深度对第一阶固有频率的影响

$a/h$	不同裂纹位置和深度时含裂纹砼梁的					文献[1]中含裂纹砼梁的第一阶				
	第一阶固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )					固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )				
	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m
0.0	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728	551.728
0.1	548.906	547.983	548.818	549.536	548.938	551.456	550.749	549.871	549.168	548.900
0.2	546.466	544.729	546.318	547.427	546.441	550.667	547.913	544.570	541.923	540.924
0.3	545.737	543.757	545.574	546.766	545.682	549.248	542.884	535.339	529.517	527.360
0.4	545.734	543.752	545.570	546.761	545.676	546.888	534.700	520.795	510.491	506.766
0.5	545.715	543.728	545.554	546.748	545.662	542.879	521.307	498.182	482.047	476.410
0.6	545.377	543.282	545.219	546.448	545.324	535.520	498.314	462.382	439.439	431.779

表 2 裂纹位置及深度对第二阶固有频率的影响

$a/h$	不同裂纹位置和深度时含裂纹砼梁的					文献[1]中含裂纹砼梁的第一阶				
	第一阶固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )					固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )				
	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m
0.0	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91	2 206.91
0.1	2 190.82	2 185.96	2 188.54	2 188.08	2 190.51	2 202.98	2 196.69	2 196.74	2 203.02	2 206.91
0.2	2 176.68	2 168.43	2 173.82	2 173.14	2 177.52	2 191.20	2 166.93	2 167.71	2 191.80	2 206.91
0.3	2 172.42	2 163.31	2 169.58	2 168.89	2 173.83	2 171.26	2 119.33	2 122.95	2 174.20	2 206.91
0.4	2 172.40	2 163.28	2 169.55	2 168.86	2 173.81	2 137.85	2 046.74	2 058.18	2 148.08	2 206.91
0.5	2 172.28	2 163.16	2 169.47	2 168.77	2 173.73	2 082.64	1 943.37	1 972.11	2 112.09	2 206.91
0.6	2 170.30	2 160.83	2 167.61	2 166.88	2 172.08	1 987.48	1 801.60	1 863.54	2 064.55	2 206.91

表 3 裂纹位置及深度对第三阶固有频率的影响

$a/h$	不同裂纹位置和深度时含裂纹砼梁的					文献[1]中含裂纹砼梁的第一阶				
	第一阶固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )					固有频率/(rad · s <sup>-1</sup> )				
	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m	$x_c=0.1$ m, $l=0.9$ m	$x_c=0.2$ m, $l=0.8$ m	$x_c=0.3$ m, $l=0.7$ m	$x_c=0.4$ m, $l=0.6$ m	$x_c=0.5$ m, $l=0.5$ m
0.0	4 966.76	4 966.76	4 966.76	4 966.76	4 966.76	4 965.55	4 965.55	4 965.55	4 965.55	4 965.55
0.1	4 918.54	4 918.76	4 932.67	4 935.74	4 932.53	4 948.83	4 942.80	4 963.14	4 956.79	4 940.31
0.2	4 876.37	4 880.41	4 905.92	4 911.53	4 905.95	4 901.00	4 881.52	4 956.53	4 932.42	4 871.36
0.3	4 863.79	4 869.44	4 898.31	4 904.68	4 898.43	4 817.74	4 786.41	4 945.93	4 892.22	4 761.33
0.4	4 863.74	4 869.38	4 898.26	4 904.64	4 898.38	4 688.20	4 661.41	4 931.22	4 834.27	4 610.16
0.5	4 863.36	4 869.14	4 898.12	4 904.50	4 898.24	4 495.66	4 512.18	4 912.21	4 774.90	4 417.62
0.6	4 857.42	4 864.26	4 894.80	4 901.49	4 894.96	4 224.91	4 349.12	4 889.06	4 655.81	4 187.59

纹砼梁固有频率有一定影响,随着裂纹深度的增加,含裂纹砼梁的前三阶固有频率逐渐减小;裂纹深度相同时,简支砼梁在对称位置的固有频率相同。由

于引入了应力影响因子函数,即考虑了裂纹尖端对应力、应变的影响,所得结果与文献[1]存在一定误差,但误差很小,两者结果基本一致,验证了文中求

解方法的正确性和可靠性。由于应力影响因子函数只适用于微小裂纹,随着裂纹深度的扩展,所得结果的误差增大。此外,比较裂纹处于不同位置时的前三阶固有频率,并未呈现明显的变化规律,说明利用固有频率进行裂纹损伤定位不具有唯一性。

#### 4 结论

该文引入裂纹影响因子函数模拟裂纹的影响,推导得到了含裂纹砼简支梁的自由振动控制方程;采用多项式展开的数值方法求解含裂纹砼梁的动力学控制方程,得到了裂纹梁的前三阶固有频率,并与已有文献比较,验证了方法的可行性。主要结论如下:1)随着裂纹深度的增加,含裂纹砼梁的前三阶固有频率减小;2)裂纹位置的变化对含裂纹砼梁的固有频率有影响,对于简支梁,当相同深度的裂纹在对称位置出现时,梁的固有频率也相同;3)利用固有频率进行裂纹损伤定位不具有唯一性。

#### 参考文献:

- [1] 王丹生,朱宏平.基于弯曲弹簧模型的裂纹混凝土梁动力特性分析[J].世界地震工程,2006,22(1).
- [2] Yokoyama T, Chen M C. Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model[J]. Engineer-

ing Fracture Mechanics,1998,59(3).

- [3] 张炜,毛崎波,聂彦平.含任意数目裂纹梁的振动分析[J].机械设计与制造,2012(10).
- [4] Ruotolo R, Surace C, Crespo P, et al. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack[J]. Computers & Structures, 1996, 61(6).
- [5] 杨鄂川,秦营,赵翔,等.含轴向运动效应的裂纹梁横向振动频率研究[J].力学季刊,2016,37(1).
- [6] 李兆军,龙慧,刘洋,等.基于有限元位移模式的含裂纹梁结构动力学模型[J].中国机械工程,2014,25(12).
- [7] 苟兵旺,刘永寿,何洁,等.轴向压力影响下裂纹梁振动特性分析[J].机械设计与制造,2009(12).
- [8] D Chen, F Liu. Free vibration of a single-edge cracked RC beam strengthened with FRP[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, 140(6).
- [9] S Christides, A D S Barr. One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1984, 26(84).
- [10] M H H Shen, C Pierre. Free vibrations of beams with a single-edge crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 170(2).
- [11] 汪亚运,彭旭龙,陈得良.轴向功能梯度变截面梁的自由振动研究[J].固体力学学报,2015,36(5).

收稿日期:2017-03-02

(上接第 111 页)

成本为 $(12+8+12+18+72+68) \times 8.5 \times 1\,000 \times 2 \div 10\,000 = 323$ 万元。预计设计周期内采用凿毛技术最多需养护 1 次,则 1 km 桥面总成本为 $289+323=612$ 万元。

采用凿毛技术,预计设计周期内 1 km 桥面可节约费用 $924.8-612=312.8$ 万元。

#### 5 结论

(1)通过对水泥砼基面处治效果评价指标及层间粘结性能评价指标的筛选,选取露骨率和构造深度评价界面处理效果,层间剪切强度和拉拔强度评价复合式路面层间粘结效果。

(2)通过现场试验路水泥砼基面处治指标测试,得出摆式摩擦系数不能用于评价水泥砼界面处治效果;凿毛方法得到的露骨率和构造深度比喷砂打毛法更高,界面粗糙度更大。

(3)喷砂法处理的复合路面的剪切强度和拉拔

强度远低于凿毛法,凿毛界面粗糙度更大,能提供比喷砂界面更大的抗剪强度和粘结强度,有助于提高刚柔界面的粘结性能。

(4)与喷砂法相比,凿毛界面具有更好的经济性和性能优势。

#### 参考文献:

- [1] 徐国强,金兆国,赵士辉.水泥混凝土路面糙化处治对比研究[J].吉林交通科技,2013(2).
- [2] 刘海川,迟鹏.抛丸工艺在桥面工程的应用[J].公路,2011(11).
- [3] 袁振中,吴春颖.水泥混凝土桥面板常见病害分析及喷砂抛丸处理工艺试验[J].公路交通科技:应用技术版,2014(6).
- [4] 陈志刚.柔性基层在某市政道路“白改黑”工程中的应用[J].公路与汽运,2015(4).

收稿日期:2017-03-27