

基于 K 最短路的流量分配算法研究^{*}

罗经纬

(长沙理工大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410004)

摘要: 结合国内城市轨道交通无缝换乘的运营特点, 充分考虑影响城市轨道交通网络客流分配的主要因素及轨道交通网络的特有属性, 用运行时间、换乘时间、拥挤附加时间构造城市轨道交通网络广义费用函数, 分析乘客在城市轨道交通网络中的路径选择行为; 在此基础上, 基于图的理论和随机用户平衡原则提出城市轨道交通网络客流分配数学优化模型, 设计基于费用约束的 K 最短路算法进行求解, 得出更符合实际的有效路径集合, 并通过一组数据对模型和算法进行了验证。

关键词: 城市交通; 轨道交通; 客流分配; K 短路; Frank-Wolfe 算法

中图分类号: U491.1

文献标志码: A

文章编号: 1671-2668(2017)04-0014-03

城市轨道交通发展迅速, 合理的客流分配是保证轨道交通安全、高效运营的必要条件。在城市不断建设的情形下, 轨道交通已形成网络化运营并实现“零费用换乘”, 使乘客的路径选择不唯一。文献[1]应用 Logit 模型对城市轨道交通网络的客流分配问题进行了理论建模; 文献[2]构造了城市轨道交通网络的路径广义费用模型, 提出了基于改进 Logit 模型的城市轨道交通网络客流分配方法并采用基于图的遍历算法确定 OD 间的有效路径; 文献[3]构建了弹性需求下的轨道交通均衡配流模型; 文献[4]利用经典的 Frank-Wolfe 算法求解城市轨道交通网络的客流量均衡分配模型; 文献[5]通过对有效路径的重新定义改进了 Dial 算法配流; 文献[6]在建立配流模型过程中设计了基于图的深度优先搜索算法; 文献[7]提出了基于动态规划的复杂度为 $O(m + n \lg n + m \lg k)$ 的 K 短路算法。该文在上述研究的基础上引入有效路径的概念, 充分考虑城市轨道交通网络中影响乘客路径选择的主要因素, 对有效路径重新定义, 构建均衡配流模型, 并利用 Frank-Wolfe 算法进行求解。

1 轨道交通网络描述

城市轨道交通网络由车站和连接它们的轨道组成, 车站对应于节点 V , 轨道对应于边 E (单位: m), 列车的初始阻抗即行驶时间对应于边权 W (单位: s)。如图 1 所示, 城市轨道交通路网可描述为 $G = (V, E, W)$ 。路段编号见图 2。该文的研究问题为

已知路网、 OD 需求、线路及换乘耗时, 求流量的分配结果。

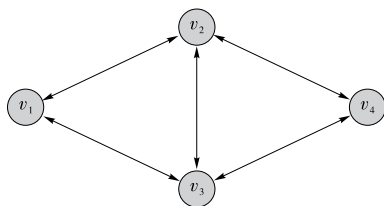


图 1 某路网拓扑图

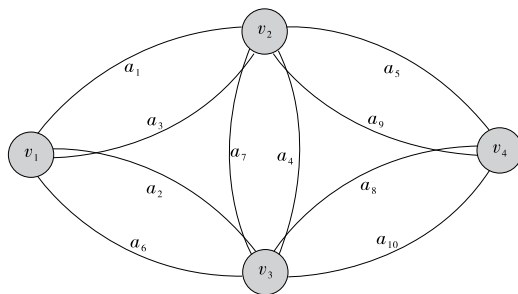


图 2 路段编号

2 约束条件

2.1 运行时间

T_{ij} 表示列车在两节点间的运行时间。在网络中, 路段运行时间是确定的, 运行时间矩阵由列车运行时刻表决定, 在实际应用中可通过列车运营官方网站获取。

$$T_{ij} = \begin{cases} t_a, & E_{ij} = 1 \\ +\infty, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

式中: t_a 为 a 路段的运行时间; i, j 表示节点。

^{*} 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51208064)

2.2 有效路径与换乘时间

为了方便描述有效路径,定义最大容忍系数 H ,即相对于最短路出行者不允许耗费超过 H 倍的费用完成出行行为,则当满足下式时 k 路径有效:

$$\frac{t_k}{t_{\min}} \leq H \quad (2)$$

式中: t_k 为第 k 条路径的实际运行时间; t_{\min} 为从起点 r 到终点 s 的最短运行时间。

求 K 短路时先对路段进行编号,以便表达路径与路段的关系,再根据换乘规则对路段时间进行累加,求得 t_{\min} 和 t_k 。 H 可由问卷调查或经验法确定。反求满足条件的 k 短路,对路径进行编号,再用 0—1 矩阵 M_{xf} 表示各路径与路段的关系(M_{xf} 的行号表示路径编号,列号表示路段编号)。有效路径可表述为:

$$M_{xf} = \begin{cases} 1, \text{路径 } k \text{ 经过路段 } a \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

换乘时间与有效路径相互约束。考虑换乘影响的满足有效路径约束的算法如下:1) 若起点或终点不在指定路网中,则提示纠正,否则调用 Dijkstra 算法求出最短路径及其费用。2) 初始化,若当前找到的最短路费用满足式(3)的约束,则保存该路径,否则删除该路径,结束循环。3) 关闭已搜索的路径。4) 找偏差节点的位置。5) 更新路网矩阵。6) 计算偏差顶点前的子路径费用。7) 计算偏差顶点到终点的路径及费用。8) $k = k + 1$,转到步骤 2。9) 找直达线路,即既经过起点又经过终点的线路。10) 找路网上的换乘节点,包含 2 条及以上线路的节点为可能的换乘节点。11) 找到路径 k 上的换乘节点,保存该换乘节点集合。首先找到经过起点线路上的站点和经过终点线路上的站点的交集,再找到该交集与步骤 10 中找到的可能换乘节点的交集,与 k 路径上所有站点的交集即为该路径上的换乘节点。12) 计算换乘次数 n_k^{rs} 。13) 按式(4)计算换乘费用。14) 求出考虑换乘的总费用并排序,若式(2)成立则保存该路径,否则不保存。15) 路径路段矩阵的自动铺画,作为 Frank-Wolfe 算法配流的已知条件。

$$M_k^{rs} = n_k^{rs} t \quad (4)$$

式中: t 为平均运行时间。

2.3 拥挤附加时间

用感知时间函数描述拥挤附加时间。拥挤附加

时间与乘客数量、列车车厢座位数和最大载客能力有关,其关系可用下式表达:

$$G(x_a) = \begin{cases} 0, x_a \leq C_s \\ [(x_a - C_s)/C_s]A, C_s < x_a \leq C_{\max} \\ [(C_{\max} - C_s)/C_s]A + [(x_a - C_{\max})/C_s]B, x_a > C_{\max} \end{cases} \quad (5)$$

式中: x_a 表示乘客数量; C_s 表示列车车厢座位数; C_{\max} 表示最大载客能力。

该文重点探讨配流时有效路径问题,在求解过程中考虑到附加拥挤时间对乘客心理的影响,路径 k 上各路段阻抗包括路段的运行时间和拥挤附加时间,即:

$$C_{a,k}^{rs} = t_a + G(x_a) \quad (6)$$

3 建立模型

对于某一 OD 对,满足 Wardrop 第一原理交通分配数学规划将模型表述为:

$$\min Z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} C_{a,k}^{rs}(\omega) d\omega \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_k f_k^{rs} = q^{rs}, \forall r, s \in N \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} f_k^{rs} \geq 0, \forall k, r, s \in N \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs}, \forall a \in A \end{cases} \quad (10)$$

式(7)为目标函数,式(8)表示流量守恒约束,式(9)表示路径流量非负约束,式(10)表示路段流量与路径流量的关系。

4 求解算法

采用经典的 Frank-Wolfe 算法对模型进行计算。UE 模型是一种特殊的非线性规划模型,因为约束条件都是非线性的, Frank-Wolfe 算法运用线性规划逐步逼近非线性规划的方法求解 UE 模型,是一种迭代算法。已知路网、路线和 OD 需求,通过上述计算求得路径矩阵和路段阻抗。对 UE 模型的目标函数作一阶泰勒展开并删除常数项,则该线性规划模型等价于原 UE 模型,可用 Frank-Wolfe 算法求解。

$$\min Z(x) = \min \nabla f(x^0)^T x \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad AX = B \quad (12)$$

5 算例分析

常数的取值见表 1。某路网由 4 个节点和 10

条路段(区分上下行)组成(见图1、图2),其基础数据见表2,运用上述模型和算法求流量分配结果,验证其可行性。

表1 常数的取值

参数名称	取值	参数名称	取值
影响因子 ϵ	1×10^{-3}	平均运行时间 \bar{t}/h	2.5
最大容忍系数 H	1.5	路段容量 C_{ap}	0.15
车厢座位数 $C_s/\text{个}$	1 860	A	2
最大载客能力 $C_{\max}/\text{人}$	2 460	B	5

注:取值来自实际调查和经验值。

表2 路网基础数据

路网矩阵 (运行时间/h)	线路集合(路线 与站点的关系)	客流需求($v_1 - v_4$)/(veh · h ⁻¹)
$T = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 3 & \text{inf} \\ 2.5 & 0 & 1 & 3.5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ \text{inf} & 3.5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$L = \{ [1 \ 2 \ 4] \\ [1 \ 3 \ 4] \ [2 \ 3] \}$	$q = 4\ 000$

上述模型和算法通过 MATLAB 编程实现,迭代次数为 6,误差值为 0.000 351 5,路段权重为:

$W =$

$[2.5 \ 3 \ 2.5 \ 1 \ 3.5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3.5 \ 2]$

路线、路段关系矩阵为:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有效路径关系矩阵为:

$$M_{ef} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最终路径阻抗为:

$$f_t = \begin{bmatrix} 605.84 \\ 605.77 \end{bmatrix}$$

目标函数值为 1 221 999.17,配流结果见表 3。

表3 配流结果

路段	配流结果	路段	配流结果
a_1	1 998.35	a_6	0.00
a_2	2 001.65	a_7	0.00
a_3	0.00	a_8	2 001.65
a_4	0.00	a_9	0.00
a_5	1 998.35	a_{10}	0.00

从表3可看出:4条路径中2条不符合有效路径的要求,最终的路径有2条,分别为路段 $\{a_2, a_8\}$ 和路段 $[a_1, a_5]$,均为直达路线;路段 a_4 和 a_7 均没

有流量被加载,说明从换乘点 $\{v_2, v_3\}$ 换乘费用增加较大;最终的配流结果使得两条路径的阻抗值基本相等,也就是说这两条路径的出行费用基本相等,说明考虑有效路径后的流量加载方案更符合人们的日常出行行为。

6 结语

路径问题是交通分配的重中之重,当节点数量较大时宜采用路径筛选的方法将不必要的路径过滤。该文基于K最短路算法构造的路径筛选模型能减少冗余计算,适用于大规模路网配流计算,算例结果表明,不同路径上的路径阻抗基本相同,满足平衡分配的基本特征。

参考文献:

- [1] 刘剑锋,孙福亮,柏赞,等.城市轨道交通乘客路径选择模型及算法[J].交通运输系统工程与信息,2009,9(2).
- [2] 林湛,蒋明青,刘剑锋,等.城市轨道交通客流分配的改进 Logit 模型及方法[J].交通运输系统工程与信息,2012,12(6).
- [3] 孔繁钰,李献忠.弹性需求下的轨道交通客流分配模型和算法[J].西安工程大学学报,2008,22(1).
- [4] 吴祥云,刘灿齐.轨道交通客流量均衡分配模型与算法[J].同济大学学报:自然科学版,2004,32(9).
- [5] 四兵锋,张好智,高自友.求解 Logit 随机网络配流问题的改进 Dial 算法[J].中国公路学报,2009,22(1).
- [6] 四兵锋,毛保华,刘智丽.无缝换乘条件下城市轨道交通网络客流分配模型及算法[J].铁道学报,2007,29(6).
- [7] 李成江.新的k最短路算法[J].山东大学学报:理学版,2006,41(4).
- [8] 李峰,王书宁.基于 Frank-Wolfe 算法的路径交通量求解方法[J].吉林大学学报:工学版,2005,35(6).
- [9] 徐猛,屈云超,高自友.Frank-Wolfe 算法求解交通分配问题:比较不同流量更新策略和线搜索技术[J].交通运输系统工程与信息,2008,8(3).
- [10] 方威.基于萨维奇准则的鲁棒最短路模型研究[J].公路与汽运,2016(1).
- [11] 石宁,贾迎琳.带约束条件的 K 最短路问题[J].中大管理研究,2009,4(1).
- [12] 齐小刚,刘三阳.一种基于 K 最短路径的 QoS 路由选择算法[J].吉林大学学报:工学版,2005,35(5).
- [13] 罗湘.公交线网规划的模型与算法[D].长沙:中南大学,2011.

收稿日期:2017-03-09