基于混合对数正态分布的桥梁车辆荷载模型研究*

李应求[1]，宋玉华[1]，李德如[2]
(1.长沙理工大学 数学与统计学院，湖南 长沙 410004；2.长沙理工大学 土木与建筑学院，湖南 长沙 410004)

摘要：为研究特大桥梁车辆荷载的概率模型，选取南溪长江大桥基于动态称重系统(WIM)的监测数据，对其通行车辆荷载概率模型进行分析，建立了南溪长江大桥实际车辆荷载的混合对数正态概率模型，并采用非线性最小二乘估计对该模型参数进行了估计。结果表明，针对南溪长江大桥的车辆荷载数据呈现多峰的情况，采用 3 个对数正态分布混合的模型拟合车辆荷载数据效果显著，能较好地反映桥梁荷载的实际情况。

关键词：桥梁；车辆荷载；混合对数正态分布；非线性最小二乘估计
中图分类号：U446.1 **文献标志码：**A **文章编号：**1671－2668(2018)01－0145－04

车辆荷载是桥梁承受的基本可变荷载之一，在桥梁设计、评估等荷载组合中占有重要地位，建立能合理预测、评估基准期荷载的车辆荷载模型对在役桥梁可靠度分析具有重要意义。由于近些年车辆荷载发生了很大变化，对车辆荷载的随机过程考虑单一的正态分布等不再符合实际情况，需根据实际存在多峰的情况，考虑用混合分布建立更符合实际情况的车辆荷载模型，以更准确地进行桥梁受力分析。

关于车辆荷载模型，Tong 等利用多峰概率模型估算了车辆荷载的极值分布；梅刚等根据国道 110 上的车辆荷载数据，将车辆荷载概率模型建为两个正态分布加权和的双峰型概率分布；Gongkang Fu 基于美国纽约州境内部分超载现象严重道路的车辆荷载资料，建立了包含超载车辆特征的车辆荷载模型；郭彤等根据实测车辆荷载呈现多峰分布的特征，采用极值 I 分布函数和正态分布函数的加权和作为车辆荷载的概率分布函数；贡金鑫等采用极大似然估计，用 4 个正态分布的加权和与正态分布的截尾分布表示非治超地区测点车辆荷载的概率分布，用极值 I 型分布描述最重车的概率分布；夏叶飞等基于动态称重系统(WIM)数据，分析了车重、车间距和轴重等特征参数，发现各车道车重服从典型的三峰分布，车间距服从 Weibull 分布；杨东晓等采用最小二乘法对京珠(北京—珠海)高速公路车辆荷载进行分析，构建了 2 个正态分布和 1 个极值 I 分布加权和的三峰概率分布模型；Dezhang Sun 等基于杭州湾跨海大桥的 WIM 数据，采用混合高斯模型作为桥梁车辆荷载的概率模型。该文根据南溪长江大桥车辆荷载统计数据，基于混合对数正态分布建立车辆荷载分布估计模型。

1 数据分析

南溪长江大桥是宜泸(宜宾—泸州)高速公路的三大控制性工程之一，也是长江上游第一座现代化特大型悬索桥。全长 1 295.89 m，主跨为 820 m 单跨钢箱梁悬索桥，宽 24.5 m。为双塔门式拉索桥，双向四车道，于 2012 年 12 月建成通车。

1.1 数据采集

运用 WIM(双向)获取车辆信息，包括时间、车重、轴重、轴距、轴数和行驶速度等，利用 2014 年 3 月 1—15 日的 WIM 数据进行车辆荷载概率模型分布研究。

在分析之前对数据进行预处理，去除明显错误和无意义的数据。由于车重小于 3 t 的车辆对桥梁的影响非常小，在此主要考虑车重大于或等于 3 t 的有效数据。经过预处理，从 15 d 的 86 086 个数据中筛选得到 15 d 有效天数及 16 211 个有效数据点。

1.2 车辆荷载统计特征

对预处理后的有效数据按日期分类，统计计算有效天数中每天通过该桥的车辆总数、平均车重、标准差、变异系数、车重最大值和最小值等，结果见表 1。

根据表 1 中数据建立荷载分布直方图(见图 1)，从中可见，高速公路桥梁的车辆荷载呈现多峰分布特性，很难用传统的单峰概率分布模型来描述。

* **基金项目：**国家自然科学基金项目(11571052)

表 1 车辆荷载统计分析

日期	车辆数量/辆	车重/t			标准差/t	变异系数
		平均值	最小值	最大值		
3—01	985	25.454 0	3.0	76.8	19.109 0	0.750 7
3—02	932	25.443 5	3.0	76.7	18.564 9	0.729 7
3—03	958	27.070 3	3.0	82.0	20.007 5	0.739 1
3—04	1 092	30.740 2	3.0	118.0	23.222 0	0.755 4
3—05	1 107	29.917 3	3.0	109.1	23.196 6	0.775 4
3—06	1 123	27.531 8	3.0	85.2	20.946 1	0.760 8
3—07	1 031	27.526 0	3.1	101.5	20.949 5	0.761 1
3—08	1 110	30.840 8	3.0	100.5	22.676 9	0.735 3
3—09	1 032	31.034 5	3.0	117.2	24.049 1	0.774 9
3—10	1 051	32.912 1	3.0	115.2	25.271 8	0.767 9
3—11	1 133	36.228 1	3.0	138.0	28.488 3	0.786 4
3—12	1 234	38.989 1	3.0	133.1	30.616 8	0.785 3
3—13	1 165	33.883 9	3.2	100.9	25.639 0	0.756 7
3—14	1 119	35.460 8	3.1	140.8	27.670 4	0.780 3
3—15	1 139	36.199 6	3.1	139.3	27.964 9	0.772 5

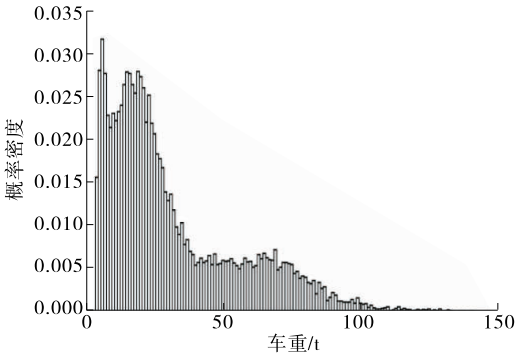


图 1 车辆荷载分布直方图

2 混合对数正态分布概率模型

2.1 概率模型

建立符合桥梁车辆荷载实际情况的混合概率模型。假设通过桥梁的车辆的主要车型为 N，第 i 种车辆荷载的累积概率函数为 $F_i(x)$，则组合车辆荷载的概率函数可表示为：

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot F_i(x) \tag{1}$$

式中：p_i 为加权系数，$\sum_{i=1}^{N} p_i=1$。

组合车辆荷载的概率密度函数为：

$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot f_i(x) \tag{2}$$

车辆荷载的混合对数正态分布概率为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} p_i \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma_i} e^{-(\ln x-\mu_i)^2/(2\sigma_i^2)}, x>0 \\ 0, x\leqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

2.2 混合对数正态分布概率模型的性质

定义：如果随机变量 X 的函数 $Y=\ln(X)$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则称 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的对数正态分布。

性质：如果随机变量 X 的函数服从混合对数正态分布，则 $Y=\ln(X)$ 服从混合正态分布。

证明：随机变量 X 混合对数正态分布的分布函数和概率密度分别为：

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot F_i(x)=\Phi(x)$$

$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot f_i(x)=\varphi(x)$$

式中：$\forall i(i=1,2,\cdots,N)$、$\Phi_i(x)$ 表示参数为 μ_i 和 σ_i^2 的对数正态分布；$\sum_{i=1}^{N} p_i=1$；$f_i(x)$ 的计算公式见式(4)。

$$f_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i x} e^{-(\ln x-\mu_i)^2/(2\sigma_i^2)}, x>0 \\ 0, x\leqslant 0\end{cases} \tag{4}$$

因为 X 服从混合对数正态分布，且 $Y=\ln(X)$，即 $X=e^Y$ 服从混合对数正态分布。于是对所有的 y，有：

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\ln X\leqslant y\}=P\{X\leqslant e^y\}=\Phi(e^y)$$

从而得：

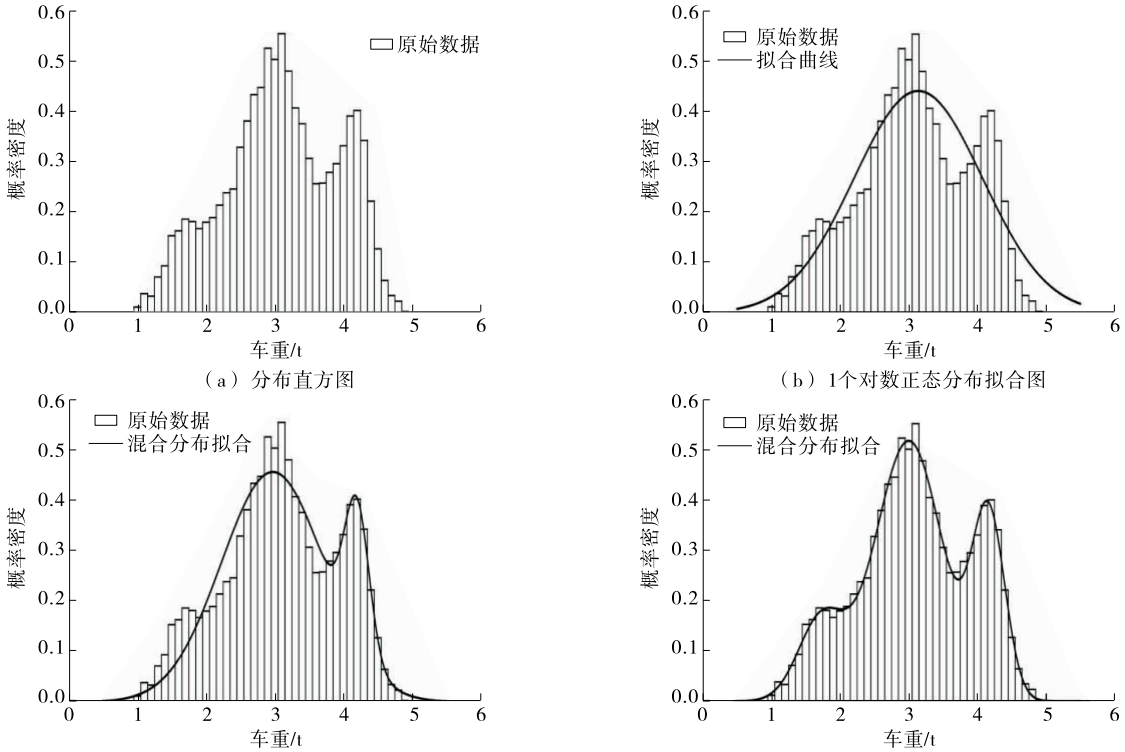
$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\Phi'(e^y)=e^y\times\varphi(e^y)=e^y\times\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot f_i(x)=\sum_{i=1}^{N}\left(e^y\times p_i\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i e^y} e^{-(\ln e^y-\mu_i)^2/(2\sigma_i^2)}\right)=\sum_{i=1}^{N} p_i\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-(y-\mu_i)^2/(2\sigma_i^2)}$$

证明完毕。

3 分布拟合

以混合对数正态分布概率模型即式(3)作为南

溪长江大桥实测数据的车辆荷载模型，采用非线性最小二乘估计对式(3)中的参数进行估计，分别用 i ($i=1,2,3$)个对数正态混合的混合模型进行拟合。方法如下：首先对数据进行对数化处理，记 $Y=\ln(X)$，若 X 服从对数正态分布，则 $Y=\ln(X)$服从正态分布，由此可以推广到混合模型中。对数化后的数据采用非线性最小二乘法进行拟合，利用 MATLAB 编写程序，得到 $i(i=1,2,3)$个对数正态分布加权和的混合对数正态分布拟合结果(见图 2)。拟合优度分析结果见表 2。



(a) 分布直方图　(b) 1个对数正态分布拟合图　(c) 2个对数正态分布拟合图　(d) 3个对数正态分布拟合图

图 2　车辆荷载分布拟合结果(数据对数化处理后)

表 2　模型参数与拟合优度

对数正态函数个数 i/个	参数	拟合优度
1	$\mu=3.140,\sigma=0.937$	0.793 1
2	$p_1=0.870,\mu_1=2.973,\sigma_1=0.749;p_2=0.130,\mu_2=4.197,\sigma_2=0.180$	0.920 1
3	$p_1=0.639,\mu_1=3.001,\sigma_1=0.488;p_2=0.141,\mu_2=1.733,\sigma_2=0.340;$ $p_3=0.220,\mu_3=4.161,\sigma_3=0.240$	0.990 4

由图 2 可知：采用 3 个对数正态分布加权和的混合对数正态分布作为桥梁荷载概率模型的效果最好，置信水平为 95%。

由表 2 可知：3 个对数正态函数加权和的混合对数正态分布模型的拟合效果最好，用 1 个对数正态分布拟合的效果最差，2 个对数正态函数混合的拟合效果在两者之间。1 个单一的对数正态分布的拟合结果适合只有 1 个最大峰值的情况，不符合该桥车辆荷载实际情况。通过南溪长江大桥的车辆类型主要包括 A2 轴中型货车、D4 轴重型货车、H6 轴重型货车 3 种，其他类型车辆的比例非常小，出现的频率相对较低，总重量的分散度较高(见表 3)。因此，3 个对数正态加权和的混合对数正态分布的拟合效果最好。

4　结论

(1) 南溪长江大桥的实际车辆荷载密度函数呈三峰状态，不能用常见的单峰分布密度函数来表示。

表 3 各车型所占比例

车型	所占比例/%
A2 轴中型货车	49.19
B3 轴中型货车	4.06
C3 轴大型货车(双联轴)	2.87
D4 轴重型货车(前后双联轴)	16.46
E4 轴重型货车(后双联轴)	0.27
F5 轴重型货车(双联轴)	0.42
G5 轴重型货车(三联轴)	1.23
H6 轴重型货车(三联轴)	25.46
J3 轴大型客车	0.04

(2) 以 3 个对数正态分布的加权和作为车辆荷载分布的密度函数,拟合优度为 0.990 4,对南溪长江大桥车辆荷载数据的拟合效果较好,可反映车辆荷载的实际情况。

(3) 通过南溪长江大桥的车辆类型主要包括 A2 轴中型货车、D4 轴重型货车、H6 轴重型货车 3 种,其他类型车辆的比例非常小,出现的频率相对较低,总重量的分散度较高。

参考文献:

[1] Matthys G,Beirlant J.Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models[J].Statistica Sinica,2003,13(3).

[2] Shao Q,Wong H,Xia J,et al.Models for extremes using the extended three-parameter Burr Ⅻ system with application to flood frequency analysis[J].Hydrological Sciences Journal,2004,49(4).

[3] 孙守旺,孙利民.基于实测的公路桥梁车辆荷载统计模型[J].同济大学学报:自然科学版,2012,40(2).

[4] 许肇峰,王强,刘仰韶.基于 WIM 的广东省公路桥梁车辆荷载模型研究[J].桥梁建设,2012,42(6).

[5] 梅刚,秦权,林道锦.公路桥梁车辆荷载的双峰分布概率模型[J].清华大学学报:自然科学版,2003,43(10).

[6] 郭彤,李爱群,赵大亮.用于公路桥梁可靠性评估的车辆荷载多峰分布概率模型[J].东南大学学报:自然科学版,2008,38(5).

[7] 贡金鑫,李文杰,赵君黎.公路桥梁车辆荷载概率模型研究(二):计重收费地区和强制治超地区[J].公路交通科技,2010,27(7).

[8] 夏叶飞,李峰峰,顾煜,等.基于 WIM 的高速公路桥梁车辆疲劳荷载谱研究[J].公路交通科技,2014,31(3).

[9] 杨东晓,黄海云,张俊平.车辆荷载概率分布及其产生的荷载效应研究[J].广州大学学报:自然科学版,2014,13(5).

[10] Dezhang Sun,Wang Xu,Bin Chen,et al.Probability model of Hangzhou Bay Bridge vehicle loads using weigh-in-motion data[J].Shock and Vibration,2015,20(1).

[11] 宗周红,李峰峰,夏叶飞.基于 WIM 的新沂河大桥车辆荷载模型研究[J].桥梁建设,2013,43(5).

收稿日期:2017—05—07

****

《中外公路》2018 年征订通知

《中外公路》(原《国外公路》)创刊于 1980 年,双月刊,由长沙理工大学主管、主办。邮局公开发行至全国公路、市政、铁路、水利、建筑等系统和相关行业,发行量大,影响面广。属全国中文核心期刊、RCCSE 中国核心学术期刊、首届(2006 年)中国高校特色科技期刊、中国高校技术类优秀期刊、中国科技核心期刊(中国科技论文统计源期刊,由中国科学技术信息研究所组织评选)、湖南省十佳科技期刊、"桥梁工程与隧道工程"栏目荣获首届(2008 年)湖南省优秀栏目、2009 年获全国高校科技期刊优秀编辑质量奖、中国期刊全文数据库及中国核心期刊(遴选)数据库全文收录期刊、中国学术期刊综合评价数据库统计源期刊、多次被评为交通部、湖南省优秀期刊。

2018 年《中外公路》为大 16 开,页码 256 页以上,每册定价 15.00 元,全年 6 期共 90.00 元。

邮发代号:42—63。读者也可通过邮局或银行汇款至杂志社直接订阅。

地址:长沙理工大学云塘校区 58 号信箱 **邮编:** 410004

收款单位:《中外公路》杂志社 **帐号:** 18—051401040000158

户名:长沙理工大学 **开户行:**长沙市农行高云支行

电话: 0731—85258033(带传真) **联系人:**白雪

E—mail: zhongwaigonglu@163.com