

碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁振动分析

陈业丰, 陈得良

(长沙理工大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410114)

摘要: 基于 Euler—Bernoulli 梁理论, 考虑纵向钢筋和碳纤维布约束效应, 通过引入应力影响因子函数模拟裂纹尖端附近砼的应力集中效应, 利用 Hamilton 原理建立碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁受迫振动的控制方程, 采用 Galerkin 法对方程进行数值分析, 分析裂纹深度、数量、间距及碳纤维布和钢筋约束效应对具多裂纹 RC 梁位移响应的影响。结果表明, 具多裂纹加固 RC 梁的位移响应受裂纹密集程度、数量、深度的影响较明显, 纵向钢筋的约束效应对加固梁的位移响应也有较大影响。

关键词: 桥梁; RC 梁; 碳纤维布加固; 多裂纹; 受迫振动; 位移响应

中图分类号: U445.7

文献标志码: A

文章编号: 1671-2668(2022)01-0124-04

钢筋混凝土梁结构作为重要的承重结构, 在现代土木工程中应用广泛, 但它在制造和服役过程中极易产生裂纹。裂纹的存在将对结构刚度、强度、稳定性及使用寿命产生很大影响。就含裂纹砼结构的静、动力学问题, Hamed E. 等在考虑砼和预应力筋材料非线性的基础上, 运用虚功变分原理推导了含裂纹预应力梁的控制方程, 通过数值算例研究了裂纹对预应力梁固有频率的影响; 王丹生等在结构振动波传播理论的基础上, 把裂纹看作弯曲弹簧, 利用断裂力学理论分析了单裂纹砼梁裂纹深度和位置对梁动力特性的影响; 余志刚等采用勒让德正交多项式作为形函数, 利用能量原理建立梁的高阶有限元动力模型, 提出了识别斜梁裂纹的计算方法; 易伟建等利用 Hilbert—Huang 变换对含裂纹梁的脉冲锤击试验的跨中加速度进行分析, 识别梁的非线性动力特征; 陈得良等考虑裂纹应力强度因子和柔度系数的关系及钢筋约束, 基于 Timoshenko 梁理论建立含裂纹梁动力学方程, 用三角级数展开分析方程, 分析了裂纹深度、密集度、钢筋约束对梁固有频率的影响; 刘峰引入裂纹强度因子, 建立 FRP 加固具单裂纹梁的控制方程, 研究了单裂纹对 FRP 加固梁动力响应的影响; Roberto Capozucca 对具裂纹 PRC/RC 梁的振动问题进行试验研究, 结果表明具裂纹钢筋砼梁非线性对梁的动力响应有很大影响。该文同时考虑钢筋、碳纤维布的约束效应和含裂纹区域应力集中效应, 利用 Hamilton 原理建立控制方程, 采用 Galerkin 方法进行数值分析, 研究裂纹数量、深度对跨中最大位移的影响和裂纹间距、深度及纵向钢筋

和碳纤维布对加固梁位移响应的影响。

1 加固梁受迫振动控制方程的建立

图 1 为具多裂纹碳纤维布加固梁模型, 加固梁的尺寸为 $L \times 2d \times 2b$, A_{s1} 、 A_{s2} 为受拉、受压钢筋的横截面面积, z_{a1} 、 z_{a2} 分别为受拉、受压钢筋的形心距中性轴的距离, 梁底两端粘贴一层厚度为 t 的碳纤维布。设有 i 条裂纹分布于梁底, 第 i 条裂纹的深度为 a_i , 其与 z 轴的距离为 x_{ci} , $P \sin(\omega t)$ 为加固梁受到的正弦外力荷载。为方便研究, 作如下假定: 1) 碳纤维布、砼、钢筋都视为均质弹性材料; 2) 应变沿梁截面高度线性变化; 3) 裂纹微小且不闭合; 4) 不考虑碳纤维布、砼、钢筋之间的剪切效应。

对于碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁, 其位移模式假设为:

$$\begin{cases} u_j = -z w_{j,x}; v_j = 0; w_j = w(x, t) \\ \epsilon_{xx}^j = \frac{\partial u_j}{\partial x} = \left[-z + \sum_{i=1}^n T_s \varphi_i(x, z) \right] \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy}^j = \epsilon_{zz}^j = 0 \\ \epsilon_{xy}^j = \epsilon_{yz}^j = \epsilon_{xz}^j = 0 \\ \sigma_{xx}^j = E_j \epsilon_{xx}^j = E_j \left[-z + \sum_{i=1}^n T_s \varphi_i(x, z) \right] \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1)$$

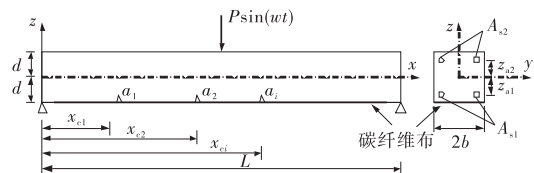


图 1 碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁简支模型

式中: n 为梁底裂纹数量; $j = f, s, c$, 分别表示碳纤维布、钢筋、砼; u 和 w 分别为微小单元体在 x, z 方向的位移; $T_s \varphi_i(x, z)$ 表示裂纹区应力集中效应; $T_s = 1, 0$ 分别表示梁上是否存在裂纹, 由于裂纹对应力、应变的影响主要作用于砼上, $j = c$ 时 $T_s = 1$, $j = f, s$ 时 $T_s = 0$; $\varphi_i(x, z)$ 为第 i 条裂纹对砼的影响因子函数, 在 $x = x_{ci}$ 和裂纹尖端处得到最大值, 沿 x 轴向裂纹两端呈指数衰减[见式(2)]。

$$\varphi_i(x, z) = \left[z - m \left(z + \frac{a_i}{2} \right) u(d - a_i - z) \right] \cdot e^{-\alpha/d |x - x_{ci}|} \quad (2)$$

式中: m, α 为常数, 分别表示裂纹周围砼应力竖向线性变化的斜率和裂纹尖端周围砼应力衰减情况, m 按式(3)计算, α 的取值为 1.276; 阶跃函数 $u(d - a_i - z)$ 表示忽略微小裂纹对中性轴以上砼应力、应变的影响, 表达式见式(4); x_{ci}, a_i 为梁上第 i 条裂纹与 z 轴的距离和深度。

$$m = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{a_i}{d} + \frac{15}{4} \left(\frac{a_i}{d} \right)^2 - \frac{13}{8} \left(\frac{a_i}{d} \right)^3} \quad (3)$$

$$u(d - a_i - z) = \begin{cases} 1, & z < d - a_i \\ 0, & z \geq d - a_i \end{cases} \quad (4)$$

利用 Hamilton 能量原理建立碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁的动力学控制方程, 采用变分原理可得:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V - U) dt = 0 \quad (5)$$

式中: U, T, V 表示多裂纹加固梁的总应变能、总动能、总外力势能; t 为时间变量。

对于细长梁, 砼梁、钢筋、碳纤维布的动能为:

$$T_j = \iiint_{V_j} \frac{1}{2} \rho_j \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy dz = \int_l \frac{1}{2} \rho_j A_j \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6)$$

式中: $j = f, s, c$, 分别表示碳纤维布、钢筋、砼; A_j, ρ_j, V_j 分别表示对应材料的截面面积、密度和体积。

砼、钢筋、碳纤维布的应变能为:

$$\begin{cases} U_c = \int_l \frac{1}{2} E_c f(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ U_s = \int_l \frac{1}{2} E_s [f_{s1}(x) + f_{s2}(x)] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ U_f = \int_l \frac{1}{2} E_f f_f(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{cases} \quad (7)$$

式中: E_f, E_c, E_s 分别为碳纤维布、砼、钢筋的杨氏

弹性模量; $f(x), f_{si}(x), f_f(x)$ 按式(8)计算。

$$\begin{cases} f(x) = \iint [-z + \sum_{i=1}^n T_s \varphi_i(x, z)]^2 dy dz \\ f_{si}(x) = A_{si} [-z_{si} + \sum_{i=1}^n T_s \varphi_i(x, z_{si})]^2 \\ f_f(x) = A_f [-z_f + T_s \varphi(x, z_f)]^2 \end{cases} \quad (8)$$

式中: $z_{si} (i = 1, 2), z_f$ 分别表示钢筋和碳纤维布距中性轴的距离。

梁的外力势能 V 为:

$$V = - \int q(x, t) w(x, t) dx \quad (9)$$

式中: $q(x, t)$ 为分布荷载。

将式(6)~(9)代入式(5), 并进行分部积分, 得:

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = q \quad (10)$$

式中: α_1, α_2 按式(11)计算。

$$\begin{cases} \alpha_1 = E_c f(x) + E_s [f_{s1}(x) + f_{s2}(x)] + E_f f_f(x) \\ \alpha_2 = \rho_c A_c + \rho_s (A_{s1} + A_{s2}) + \rho_f A_f \end{cases} \quad (11)$$

2 方程求解

碳纤维布加固具多裂纹 RC 简支梁模型的边界条件为: 在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处, $\delta w = 0, \delta w'' = 0$ 。对 w 进行变量分离, 设:

$$w = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) T(t) \quad (12)$$

将式(12)代入式(10), 得:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_2 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \ddot{T} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi x}{l}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} [\alpha_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)] T = q \quad (13)$$

式(13)两边同时乘以 $\sin(j\pi x/l)$, 并沿梁长积分, 得:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \alpha_2 \ddot{T} \int_l \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dx + \\ & \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 T \int_l \alpha_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \cdot \\ & dx = \int_l q \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (14)$$

式中: $\delta(x - l/2)$ 按式(15)计算。

$$\delta\left(x - \frac{l}{2}\right) = \begin{cases} 0, & x \neq l/2 \\ 1, & x = l/2 \end{cases} \quad (15)$$

将式(14)写成矩阵形式:

$$M \ddot{T} + K T = Q \quad (16)$$

式中: M 、 K 、 Q 分别为方程的质量矩阵、刚度矩阵和广义力矩阵, 按式 (17) ~ (19) 计算; $T = [T_1, T_2, \dots, T_n]^T$ 为 n 阶列向量。

$$M = \sum_{i,j=1}^n \int_0^l \alpha_2 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dx = \alpha_2 \frac{l}{2} [I] \quad (17)$$

$$K = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \int_0^l \alpha_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) dx \quad (18)$$

$$Q = \int_l q \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) dx = \int_l \sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \cdot P \sin(\omega t) \delta\left(x - \frac{l}{2}\right) dx = P \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (19)$$

式中: $[I]$ 为 $n \times n$ 单位矩阵。

3 计算结果与分析

建立一碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁模型, 分析其在简谐荷载作用下的动力响应。梁长 $l = 2$ m, 梁半高 $d = 0.1$ m, 梁半宽 $b = 0.05$ m; 砼的弹性模量 $E_c = 2.4 \times 10^4$ MPa, 钢筋的弹性模量 $E_s = 2.1 \times 10^5$ MPa, FRP 的弹性模量 $E_f = 2.1 \times 10^5$ MPa; 砼的密度 $\rho_c = 2450$ kg/m³, 钢筋的密度 $\rho_s = 7850$ kg/m³, 碳纤维布的密度 $\rho_f = 1550$ kg/m³; 碳纤维布厚度 $t = 0.23 \times 10^{-3}$ m; 受拉、受压钢筋截面面积 A_{s1} 、 A_{s2} 均为 157×10^{-6} m²。

3.1 裂纹数量和深度对梁跨中最大位移的影响

在加固梁跨中处作用大小 $P = 1$ kN、频率为 10 Hz 的正弦载荷, 裂纹均布于梁下侧, 裂纹深度 a 分别为 0.01、0.03、0.05 m, 梁跨中处最大位移见图 2。

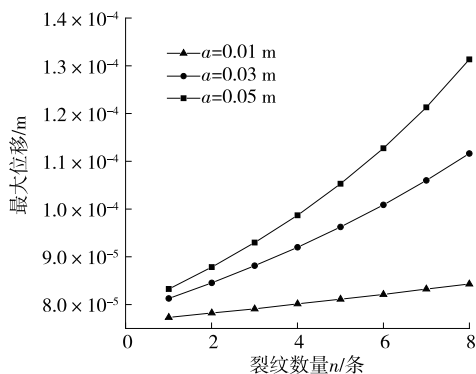


图2 裂纹数量对梁跨中最大位移的影响

由图2可知: 随着碳纤维布加固梁上裂纹数量 n 和裂纹深度 a 的增加, 梁跨中最大位移增大; 相同

裂纹数量下, 随着裂纹深度增加, 梁跨中最大位移增大, 但增幅变小; 裂纹深度较小时, 随着裂纹数量增加, 梁跨中最大位移增大; 裂纹深度较大时, 随着裂纹数量增加, 梁跨中最大位移趋向指数增大。

3.2 裂纹间距和深度对梁位移响应的影响

在梁跨中作用大小 $P = 1$ kN、频率为 10 Hz 的正弦载荷, 裂纹数量 $n = 5$ 条, 图3~5为裂纹深度 a 分别为 0.02、0.05、0.08 m 时裂纹间距对多裂纹梁的动力响应。

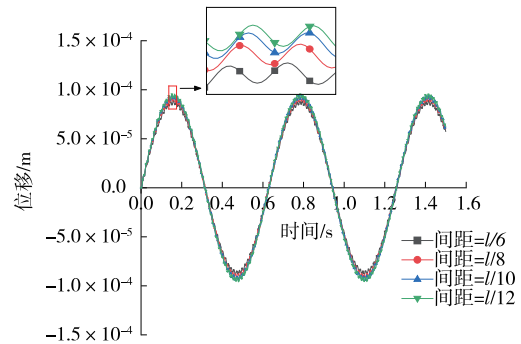


图3 裂纹间距对具裂纹梁位移响应的影响

($a = 0.02$ m, $n = 5$ 条)

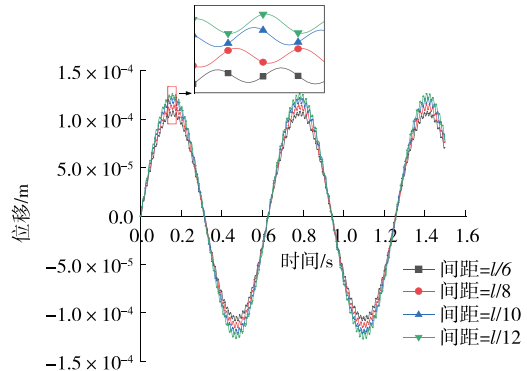


图4 裂纹间距对具裂纹梁位移响应的影响

($a = 0.05$ m, $n = 5$ 条)

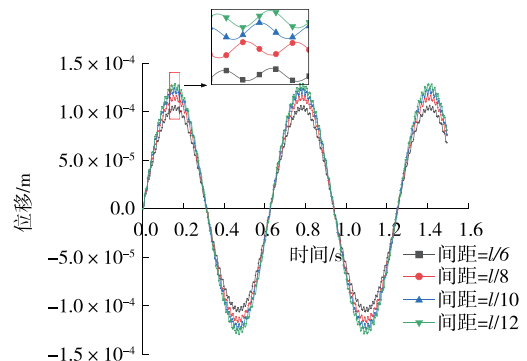


图5 裂纹间距对具裂纹梁位移响应的影响

($a = 0.08$ m, $n = 5$ 条)

从图 3~5 可以看出:在相同裂纹数量和裂纹深度下,具裂纹梁的最大跨中位移随着裂纹间距的减小而逐渐增大,但增幅逐渐减小;裂纹深度 a 分别为 0.02、0.05、0.08 m 时,裂纹间距 $l/12$ 和 $l/6$ 对应的位移差值分别为 3.29×10^{-6} 、 1.59×10^{-5} 、 2.28×10^{-5} m。说明裂纹深度较小时,裂纹密集程度对梁位移响应的影响较小,但随着裂纹深度的增加,裂纹间距对位移响应的影响逐渐增大。

3.3 钢筋和碳纤维布对梁位移响应的影响

在梁跨中处作用大小 $P=1$ kN、频率为 10 Hz 的正弦载荷,裂纹间距为 $l/8$,裂纹数量 n 分别为 3、5、7 条,钢筋和碳纤维布对梁跨中处位移响应的影响见图 6~8。

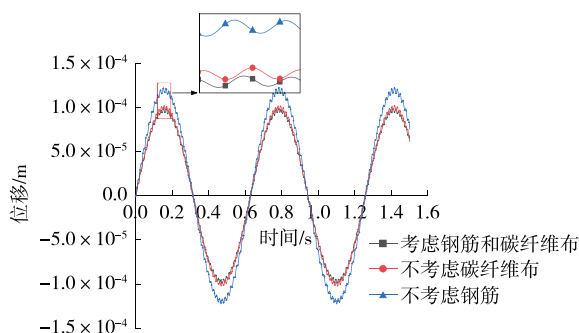


图 6 裂纹数量 $n=3$ 条时梁的位移响应

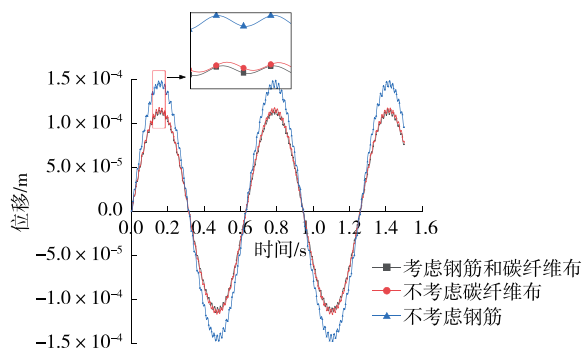


图 7 裂纹数量 $n=5$ 条时梁的位移响应

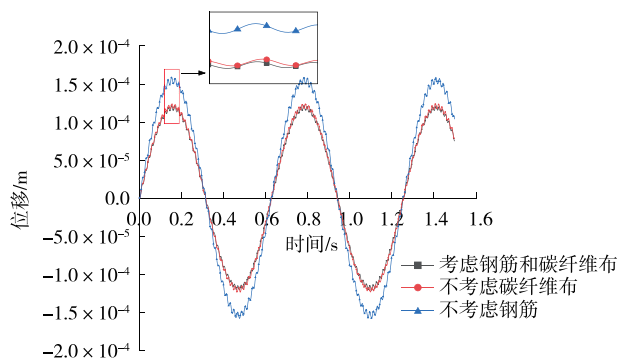


图 8 裂纹数量 $n=7$ 条时梁的位移响应

从图 6~8 可以看出:具裂纹加固梁在不考虑钢筋约束时的位移响应最大,同时考虑钢筋约束作用和碳纤维布时梁的位移响应最小,其值与不考虑碳纤维布作用时加固梁位移响应的差值很小,可忽略不计;不考虑钢筋约束效应时,随着裂纹数量的增多,加固梁的位移响应逐渐增大,且增幅很大。对用碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁进行受迫振动分析时,钢筋的约束作用不可忽略。

4 结论

基于 Euler-Bernoulli 梁理论,同时考虑钢筋和碳纤维布对梁的约束效应,引入 $T_s \varphi_i(x, z)$ 函数分析裂纹对周边砼应力、应变的影响,运用 Hamilton 原理建立碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁的动力学控制方程,用三角级数展开的数值方法对方程进行分析求解,研究裂纹数量、深度、间距及碳纤维布和钢筋约束效应对具裂纹梁的位移响应,得到以下结论:

- (1) 裂纹深度和数量对加固梁刚度有较大影响,随着裂纹数量和深度的增加,加固梁跨中最大位移逐渐增大。
- (2) 裂纹密集程度对加固梁刚度有较大影响,裂纹深度和数量相同时,裂纹间距减小会导致含多裂纹加固梁的位移响应逐渐增大,且裂纹深度的增加会加大裂纹间距对位移响应的影响。
- (3) 碳纤维布对位移响应的影响比钢筋约束效应的影响小,对碳纤维布加固具多裂纹 RC 梁进行受迫振动响应分析时,钢筋的约束作用不可忽略。

参考文献:

- [1] HAMED E, FROSTIG Y. Free vibrations of cracked prestressed concrete beams[J]. Engineering Structures, 2004, 26(11): 1611-1621.
- [2] 王丹生, 朱宏平. 基于弯曲弹簧模型的裂纹混凝土梁动力特性分析[J]. 世界地震工程, 2006, 22(1): 45-48.
- [3] 余志刚, 褚福磊. 基于高阶有限元方法的裂纹斜梁振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2008, 27(10): 46-50.
- [4] 易伟建, 段素萍. 带裂缝钢筋混凝土梁的非线性振动特征识别[J]. 振动与冲击, 2008, 27(3): 26-29.
- [5] 陈得良, 汪亚运, 吝国胜, 等. 含多裂纹(群)钢筋混凝土梁的自由振动研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(19): 109-114.
- [6] CHEN D, LIU F. Free vibration of a single-edge cracked

(下转第 132 页)

点位移出现的位置一致,计算结果偏差为 7.1%,偏差较小。

表 3 分析结果对比

建模方式	最大等效应力		最大节点位移/mm
	大小/MPa	出现位置	
ANSYS 建模	215.1	下翼缘作用荷载处底面中心位置	0.78
Revit 建模导入 ABAQUS	230.5	下翼缘作用荷载处底面中心位置	0.80

5 结语

在桥梁工程结构设计阶段,结构模型的受力分析是关键,其计算分析结果是绘制施工图的主要依据。实现该环节的 BIM 技术应用,对工程项目全过程数据信息共享、管理和传递具有重要作用。基于某桥梁工程运梁轨道 Revit 模型进行有限元分析,结果表明转换模型几何尺寸、空间位置及构件之间的连接关系准确,转换模型计算结果与 ANSYS 模型计算结果具有一致性。通过 Revit 导出 SAT 格式文件,实现 Revit 到 ABAQUS 的模型转换可行,可大大提升有限元软件的建模效率。将 BIM 建模软件和 ABAQUS 软件相结合,在建模和优化设计方面具有很大优势。

参考文献:

- [1] 邓雪原,张之勇,刘西拉.基于 IFC 标准的建筑结构模型的自动生成[J].土木工程学报,2007,40(2):6-12.
- [2] 曾翔,陆新征,许镇.基于 BIM 数据的建筑抗震弹性分析建模技术[J].计算机辅助工程,2014,23(4):5-11.
- [3] 张建平,张洋,张新.基于 IFC 的 BIM 三维几何建模及模型转换[J].土木建筑工程信息技术,2009,1(1):40-46.

- [4] 刘照球,李云贵,吕西林,等.基于 IFC 标准的结构动力分析信息扩展框架[J].华南理工大学学报(自然科学版),2010,38(7):122-127.
- [5] 李犁.基于 BIM 技术建筑协同平台的初步研究[D].上海:上海交通大学,2012.
- [6] 王轩,胡筋,杨晖柱,等.基于工业基础类数据标准的结构模型转换技术[J].同济大学学报(自然科学版),2014,42(6):836-843.
- [7] 吕凯垣,徐俊.基于 IFC4x1 的桥梁信息模型转换研究[J].土木建筑工程信息技术,2019,11(2):95-100.
- [8] 袁明伟.基于 BIM 技术的结构设计方法研究[D].锦州:辽宁工业大学,2017.
- [9] 宋杰,张亚栋,王孟进,等.Revit 与 ANSYS 结构模型转换接口研究[J].土木工程与管理学报,2016,33(1):79-84.
- [10] 封大为.BIM 模型与力学结构分析接口开发研究[D].西安:长安大学,2019.
- [11] 丁晓宇.基于 Revit 二次曲面参数化设计的研究[D].大连:大连理工大学,2016.
- [12] 陈志为,吴焜,黄颖,等.基于 BIM 的复杂结构有限元精细模型生成[J].土木工程与管理学报,2018,35(5):60-64+81.
- [13] 乔保娟,邓正贤,张洪磊.PKPM 与 Revit 接口软件中若干问题探讨[J].土木建筑工程信息技术,2014,6(1):113-117.
- [14] 刘照球,张吉.结构分析 BIM 模型框架和数据转换应用[J].工业建筑,2015,45(2):178-183.
- [15] 董卯,郭乃胜,王楠,等.基于 Revit 与 MIDAS/CIVIL 的桥梁结构模型转换方法[J].大连海事大学学报,2020,46(3):101-108.
- [16] 蓝天宇.BIM 技术在建筑工程结构设计阶段的应用研究[D].南昌:华东交通大学,2019.

收稿日期:2020-12-29

(上接第 127 页)

- RC beam strengthened with FRP[J].Journal of Engineering Mechanics,2014,140(6):682-694.
- [7] 刘锋.FRP 加固具裂纹 RC 梁的动力学特性及疲劳分析[D].长沙:长沙理工大学,2013.
 - [8] ROBERTO Capozucca.A reflection on the application of vibration tests for the assessment of cracking in PRC/RC beams[J].Engineering Structures,2013,48:508-518.
 - [9] CHRISTIDES S,BARR A D S.One-dimensional theory

of cracked Bernoulli-Euler beams[J].International Journal of Mechanical Sciences,1984,26(11-12):639-648.

- [10] SHENM H H,PIERRE C.Free vibrations of beams with a single-edge crack[J].Journal of Sound and Vibration,1994,170(2):237-259.
- [11] 毛铮.悬臂浇筑连续箱梁病害分析及加固对策研究[J].公路与汽运,2018(4):130-133.
- [12] 杨杰平.某现浇连续箱梁桥裂缝原因及加固技术分析[J].公路与汽运,2020(1):118-120.

收稿日期:2020-12-04