

数值分析中埋置式波纹钢板的刚度等效方法研究

付文强, 符锌砂, 李百建, 贺玉婷

(华南理工大学 土木与交通学院, 广东 广州 510641)

摘要: 为研究数值分析中埋置式波纹钢板的刚度等效方法, 基于波纹钢板的实际波形提出刚度表达式、材料常数换算方法及截面内力换算方法, 并采用数值分析方法建立 4 种模型验证刚度等效方法的正确性。结果表明, 采用刚度等效方法建立壳单元和实体的三维数值模型可很好地模拟波纹钢结构在外荷载作用下产生的变形与内力, 与波纹钢壳模型的误差不超过 $\pm 10\%$, 不同模型的分析结果可相互换算; 土体与波纹钢相互作用产生的轴力与弯矩的分析精度稍差, 与波纹钢壳模型的比值为 $0.73 \sim 2.61$; 波纹钢拉压刚度的等效方法及与土体的相互作用需进一步研究。

关键词: 桥梁; 波纹钢板; 刚度等效方法; 应力换算; 数值分析

中图分类号: U446.2

文献标志码: A

文章编号: 1671-2668(2022)04-0111-05

波纹钢板以其力学性能好等优点在公路工程 and 市政工程中得到广泛应用。这种结构板是通过对基础平板进行冲压或滚压成型制造而成的单向周期性波纹的结构板壳, 属于构造各向异性结构板, 其单胞结构或典型微元是类似正弦波形的单周期波纹, 经平移阵列后形成具有波纹形状的宏观结构板壳。由于结构较大的三维尺寸和复杂的微元结构, 直接建立埋置式波纹钢数值模型(如波纹钢板与周围填充材料的接触分析模型、波纹钢板斜向切割模型、大尺度波纹钢桥梁三维模型等)较困难。

刚度等效是分析波纹钢结构的一种有效方法, 可将构造各向异性转换为材料的各向异性, 从而减少建模复杂度、布尔运算失败和计算结果不收敛的风险。研究发现, Seydel 提出的波纹钢板刚度近似表达式在使用过程中存在缺陷, 当板厚较大时, 其第二主向刚度会小于平板的抗弯刚度。为此, 常福清等在 Seydel 公式的基础上提出了修正的第二主向刚度表达式; 冯岩从更广泛的角度研究了凹凸板的刚度等效方法。上述刚度等效方法均以波纹钢平板为研究对象, 未考虑埋置式波纹钢的实际波形, 并不完全适用于埋置式波纹钢结构。李百建等基于材料力学基本理论提出了埋置式波纹钢板的抗弯刚度计算方法, 并进一步提出了考虑轴向压力作用的刚度等效方法, 但忽略了泊松比的影响, 不够完善。该文在前人对波纹钢平板刚度等效方法研究的基础上, 研究埋置式波纹钢板的刚度等效方法及截面应力换算方法, 并通过数值分析进行验证。

1 波纹钢板刚度等效方法

1.1 主向刚度

如图 1 所示, 波纹钢平板波形参数包括波纹钢板半波长 l 、正弦曲线高度(1/2 波高) f 和板厚 δ , 正弦半波曲线弧长 $s = l[1 + \pi^2 f^2 / (4l^2)]$, 其形状方程为 $z = f \sin(\pi x / l)$ 。

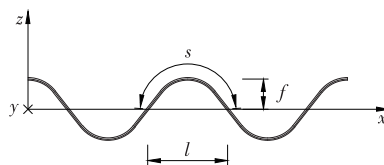


图 1 波纹钢平板波形参数

鉴于 Seydel 的第二主向刚度近似公式存在缺陷, 采用积分方法对其进行修正, 经常福清等修正后的 Seydel 主向刚度表达式为:

$$\begin{cases} D_1 = \frac{E \delta^3 l}{12(1-\mu^2)s} \\ D_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\delta}{\pi} \left[0.1767 \frac{\pi^2 f^4}{l^2} + 1.5729 f^2 + 0.2307 \frac{\delta^2 \pi^2 f^2}{l^2} + 0.2577 \delta^2 \right] \\ D_3 = \frac{E \delta^3 s}{12(1+\mu)l} \end{cases} \quad (1)$$

式中: D_1 为波纹钢板非波纹边(x 方向)的主向刚度; E 为钢材弹性模量; μ 为钢材泊松比; s 为波纹曲线弧长; D_2 为波纹钢板波纹边(y 方向)的主向刚

度; D_3 为波纹钢板抗扭刚度。

式(1)为正弦波形波纹钢板的主向刚度,适用于波纹钢屋面板、夹芯板等小波纹维护构件。而埋置式波纹钢板是大波形、板厚较大的承载板,其波形参数与正弦波稍有不同,包括波长 $2l$ 、波高 $2f$ 、波峰/波谷的曲率半径 R 和半圆心角 θ 、波纹直线段长度 TL 、波峰/波谷圆心至截面中性轴(x 轴)的距离 d 、板厚 δ 等(见图 2),基于正弦波形积分得到的第二主向刚度表达式不适用于埋置式波纹钢板。

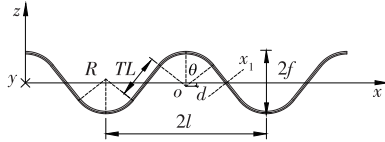


图 2 埋置式波纹钢板波形参数

事实上,若已知波纹钢的抗弯惯性矩,即可参照平板的抗弯刚度公式获得埋置式波纹钢板的第二主向刚度,其 y 方向抗弯惯性矩 I_x 为:

$$I_x = \{ (R^3 \delta \sin 2\theta + 2R^3 \delta \theta - 8R^2 \delta d \sin \theta + 4R \delta d^2 \theta) + \left[\frac{TL^3 \delta + \delta^3 TL}{12} + \frac{TL^3 \delta - \delta^3 TL}{12} \cos(180 - 2\theta) \right] \} / l \quad (2)$$

考虑泊松比效应,得到修正后埋置式波纹钢板第二主向刚度公式:

$$D_2 = \frac{E}{2(1-\mu^2)l} \{ (R^3 \delta \sin 2\theta + 2R^3 \delta \theta - 8R^2 \delta d \sin \theta + 4R \delta d^2 \theta) + \left[\frac{TL^3 \delta + \delta^3 TL}{12} + \frac{TL^3 \delta - \delta^3 TL}{12} \cos(180 - 2\theta) \right] \} \quad (3)$$

埋置式波纹钢板的第一、第二主向刚度和抗扭刚度表达式可统一改写为:

$$\begin{cases} D_1 = \frac{E \delta^3 l}{12(1-\mu^2)s} \\ D_2 = \frac{E}{2(1-\mu^2)l} \{ (R^3 \delta \sin 2\theta + 2R^3 \delta \theta - 8R^2 \delta d \sin \theta + 4R \delta d^2 \theta) + \left[\frac{TL^3 \delta + \delta^3 TL}{12} + \frac{TL^3 \delta - \delta^3 TL}{12} \cos(180 - 2\theta) \right] \} \\ D_3 = \frac{E \delta^3 s}{12(1+\mu)l} \end{cases} \quad (4)$$

1.2 材料常数换算

数值分析中,为减少建模复杂度、增加建模成功率,将构造正交异性的埋置式波纹钢板等效为材料正交异性的平钢板,将式(4)中的主向刚度换算成材料常数输入模型材料参数中。通常用到的 5 个基本参数为 E_1 、 E_2 、 G 、 μ_1 和 μ_2 ,换算法如下:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{12D_1(1-\mu_1\mu_2)}{t^3} \\ E_2 = \frac{12D_2(1-\mu_1\mu_2)}{t^3} \\ G = \frac{12D_k}{\delta^3} \end{cases} \quad (5)$$

式中: E_1 、 E_2 分别为等效后波纹钢板非波纹边(x 方向)、波纹边(y 方向)的弹性模量; μ_1 、 μ_2 分别为等效后波纹钢板非波纹边(x 方向)、波纹边(y 方向)的泊松比; t 为等效后平钢板厚度; G 为等效后波纹钢板的剪切模量; D_k 为等效后平钢板的抗扭刚度。

其中 D_k 、 μ_1 和 μ_2 满足如下关系:

$$D_k = \frac{D_3 - \mu_2 D_1}{2} = \frac{D_3 - \mu_1 D_2}{2} \quad (6)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (7)$$

具体应用时,通常按照第二主向刚度相等的原则将埋置式波纹钢板等效为板厚 $t = (12I_x)^{1/3}$ 的平板,并假设 $\mu_2 = \mu$,然后根据式(5)~(7)计算其他材料常数。

1.3 应力换算

埋置式波纹钢板为压弯构件,截面应力不仅包含轴向应力,还包含弯曲应力。而等效为平板后的截面面积 A 、截面高度 t 均与原波纹钢板的截面面积 A_0 、波高 $2f$ 不相等,需对等效平板的截面应力进行换算获得原波纹钢板的截面应力。换算公式为:

$$\begin{cases} \sigma_t = \frac{2(\sigma_1 - \sigma)f}{t} + \frac{\sigma A}{A_0} \\ \sigma_b = \frac{2(\sigma_2 - \sigma)f}{t} + \frac{\sigma A}{A_0} \\ \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \sigma_0 = \frac{\sigma A}{A_0} \end{cases} \quad (8)$$

式中: σ_t 为波纹板波峰应力; σ 、 σ_1 、 σ_2 分别为等效平板的轴向应力、顶部应力和底部应力; t 为等效平板厚度; σ_b 为波纹板波谷应力; σ_0 为波纹钢板的轴向应力。

波纹钢板第二主向(y 方向)上的轴力 N 与弯矩 M 可表示为:

$$\begin{cases} N = \sigma A = \sigma_0 A_0 \\ M = \frac{2(\sigma_1 - \sigma) I_x}{t} = \frac{2(\sigma_2 - \sigma) I_x}{t} \end{cases} \quad (9)$$

2 数值分析

2.1 算例

为验证刚度等效方法与应力换算方法的正确性,选择一座跨径为 6 m、填土高为 1 m、总高为 4 m、桥宽为 8 m 的波纹钢半圆形拱桥作为数值分析算例,波纹尺寸为 $200 \text{ mm} \times 55 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$,拱顶上部距离端墙 1 m、3 m 处分别作用集中荷载 $F = 3\,000 \text{ kN}$ (见图 3)。

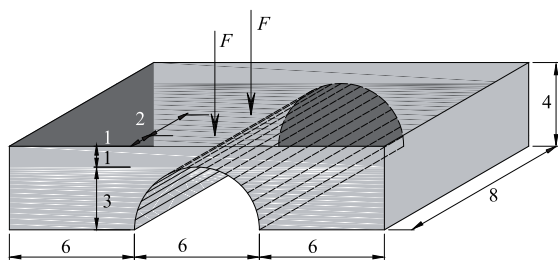


图 3 数值算例模型尺寸(单位:m)

2.2 数值模型

建立以下 4 种数值分析模型(见图 4)来验证刚度等效方法并探索建模方法:1) 考虑实际波纹的波纹钢壳模型(CSP);2) 采用刚度等效方法建立的等效平板壳模型(Shell);3) 采用刚度等效方法建立的等效平板实体单元模型(Solid);4) 采用刚度等效方法建立的等效平板梁单元二维平面模型(Beam)。

数值分析模型仅用来验证刚度等效方法和应力换算方法的分析精度及一般规律,不考虑材料层间接触及土体非线性本构关系,按弹性体进行分析。模型长 $\times$ 宽 $\times$ 高为 $18 \text{ m} \times 9 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 。模型左右两侧约束水平方向位移,端面约束前后方向位移,底面约束所有线位移。波纹钢板的容重为 78.5 kN/m^3 ,弹性模量为 $2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$,泊松比为 0.3,按弹性材料分析,不设强度上限;土体容重为 20 kN/m^3 ,弹性模量为 100 MPa ,泊松比为 0.2。

$200 \text{ mm} \times 55 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 波形的直线段长度 TL 为 36.95 mm ,波峰/波谷的曲率半径 R 为 53 mm ,半圆心角 θ 为 44° ,按式(2)计算,得 y 方向抗弯惯性矩 $I_x = 2\,288.8 \text{ mm}^4/\text{mm}$ 。按式(5)~(7)换算等效正交异性平板的材料参数,结果如下: $E_1 =$

$0.955\,5 \times 10^9 \text{ Pa}$; $E_2 = 209.95 \times 10^9 \text{ Pa}$; $G = 0.293 \times 10^9 \text{ Pa}$; $\mu_1 = 0.001\,35$; $\mu_2 = 0.3$ 。

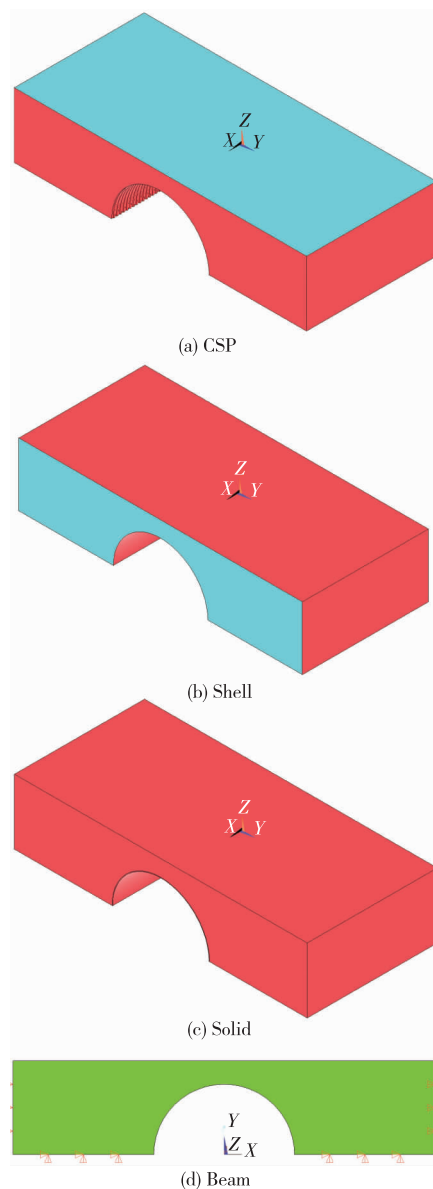


图 4 数值分析模型

壳单元和实体单元需输入的参数共 9 个,分别为 3 个主向的弹性模量、泊松比和剪切模量,而前文换算得到的只有 5 个参数,需根据实际建模方式、单元坐标系与建模采用坐标系的关系来输入其他参数。例如:实体单元的单元坐标系总是和整体坐标系一致,在该算例拱顶位置 xoy 平面承受拉压应力,在拱脚位置 xoz 平面承受拉压应力,故应将 $E_y = E_z = E_2$ 、 $E_x = E_1$ 、 $PRXY = \mu_1$ 、 $PRYZ = \mu_2$ 、 $PRXZ = \mu_1$ 、 $GXY = G$ 、 $GYZ = 0.5E_y/(1 + \mu_2)$ 、 $GXZ = G$ 输入材料属性中,并满足材料参数关系方程[见式(10)]。事实上,其等效平板后的泊松比对

结果的影响可忽略不计,可按照钢材的泊松比进行输入,但要满足关系方程。

$$1 - PRXY^2 \cdot \frac{E_y}{E_x} - PRYZ^2 \cdot \frac{E_z}{E_y} - PRXZ^2 \cdot \frac{E_z}{E_x} - 2PRXY \cdot PRYZ \cdot PRXZ \cdot \frac{E_z}{E_x} > 0 \quad (10)$$

采用三维模型时,可按实际情况对模型施加荷载。二维平面模型所加荷载应根据波纹钢桥梁计算位置进行换算,因为车辆荷载的扩散存在空间效应,为使平面模型产生的荷载效应与三维模型最大荷载效应相当,对荷载进行折减。如图5所示,三维模型顶部作用的荷载会沿着桥梁横向扩散,任意埋深 h 处的荷载扩散长度为 $2h \tan \theta$,求解任意埋深处波纹钢截面应力时,将荷载除以扩散长度后施加于模型上。该算例分析中假设荷载扩散角为 45° (弹性体),计算截面为波纹钢拱顶($h_t = 1 \text{ m}$),输入荷载为 $1\,500 \text{ kN}$ 。

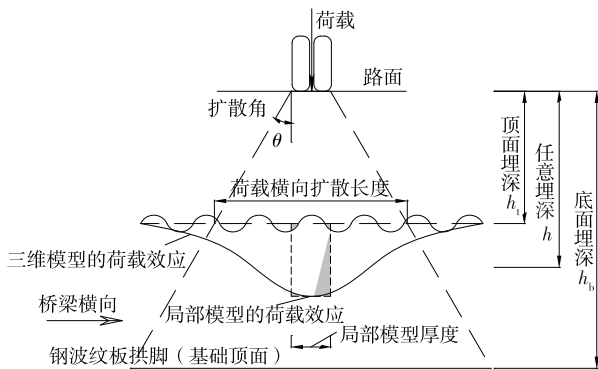


图5 荷载等效示意图

2.3 结果分析

数值分析模型变形计算结果见图6。刚度相等、约束条件相同、荷载相同的结构应具有相同的变形。从图6可看出:4种模型的总位移相近,说明采用刚度等效方法建立的模型能很好地相互表达,并能精确分析埋置式波纹钢板的变形情况。

应力分析则不能直接通过应力云图来对比,因为4种模型的截面参数不相同,即使具有相同的刚度,其截面应力分布也不相同,需将应力根据式(8)、式(9)进行换算,实现不同模型之间的相互表达。不同模型计算结果对比见表1~3。

从表1~3可看出:3种等效模型的最大位移与波纹钢壳模型最大位移的误差均不超过 $\pm 10\%$,其中等效平板壳单元模型最接近波纹钢模型,其次为

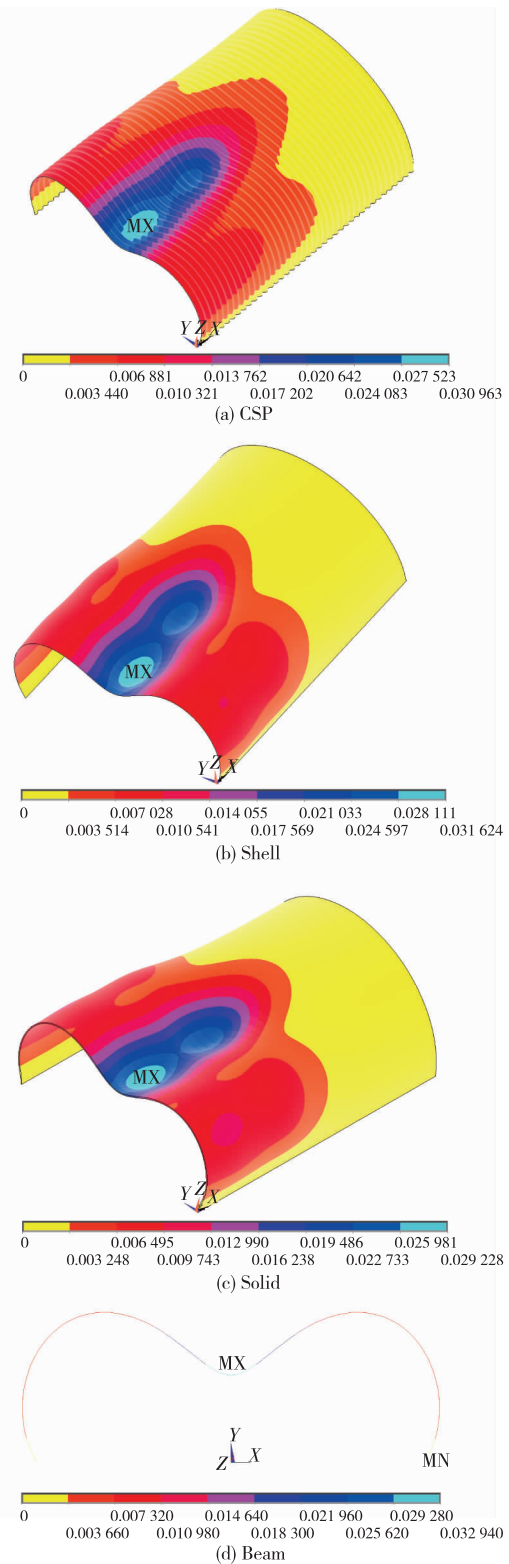


图6 数值分析模型变形云图(单位:m)

等效平板实体单元模型,再次为平面梁模型。在拱顶位置,等效平板实体单元模型计算的轴力和弯矩与波纹钢壳模型轴力、弯矩的误差不超过 $\pm 10\%$,其次为等效平板壳单元模型,再次为平面梁模型;在拱

表 1 不同模型各截面计算结果

模型	拱顶的计算结果			拱肩的计算结果		拱脚的计算结果	
	总位移/m	顶部应力/kN	底部应力/kN	顶部应力/kN	底部应力/kN	顶部应力/kN	底部应力/kN
CSP	-30.96	-445	291	-109.3	-214.4	-105.0	-159.0
Shell	-31.62	-235	208	-37.9	-92.8	-6.4	-63.2
Solid	-29.23	-203	173	-39.7	-125.9	-38.0	-59.8
Beam	-28.84	-183	168	-138.0	-247.0	-101.0	-152.0

表 2 不同模型各截面内力换算结果

模型	拱顶内力		拱肩内力		拱脚内力	
	轴力/kN	弯矩/(kN·m)	轴力/kN	弯矩/(kN·m)	轴力/kN	弯矩/(kN·m)
CSP	-455.46	30.63	-957.4	-4.37	-780	-2.25
Shell	-407.30	33.61	-1 971.0	-4.16	-1 049	-4.31
Solid	-452.55	28.52	-2 498.0	-6.53	-1 475	-1.65
Beam	-255.00	27.20	-1 210.0	-7.96	-806	-4.00

表 3 等效模型计算结果与波纹钢壳模型计算结果对比

模型	拱顶计算结果对比			拱肩计算结果对比		拱脚计算结果对比	
	位移比	轴力比	弯矩比	轴力比	弯矩比	轴力比	弯矩比
Shell	1.02	0.89	1.10	2.06	0.95	1.34	1.92
Solid	0.94	0.99	0.93	2.61	1.49	1.89	0.73
Beam	0.93	0.56	0.89	1.26	1.82	1.03	1.78

肩位置,等效平板实体单元模型、等效平板壳单元模型、平面梁模型计算的轴力和弯矩与波纹钢壳模型轴力、弯矩之比分别为 2.61 和 1.49、2.06 和 0.95、1.26 和 1.82;在拱脚位置,等效平板实体单元模型、等效平板壳单元模型、平面梁模型计算的轴力和弯矩与波纹钢壳模型轴力、弯矩之比分别为 1.89 和 0.73、1.34 和 1.92、1.03 和 1.78。说明采用刚度等效方法能很好地分析外荷载作用下波纹钢拱顶位移与内力,而拱肩与拱脚处的等效结果相差较大,最大相差 2.61 倍。这是因为刚度等效只针对于波纹钢平面外抗弯刚度而言(即弯曲刚度等效,荷载作用下产生的竖向变形和弯曲应力计算结果较精确),并未考虑柔性的波纹钢结构与土体相互作用产生的轴力,该轴力与波纹钢与土体的拉压刚度有关,刚度等效中未考虑波纹钢截面的拉压刚度等效,因此不能获得足够精确的轴力计算结果。

梁单元对拱顶的模拟精度较差,主要是因为荷载等效换算较复杂,即计算波纹钢不同截面的内力需根据不同埋深将荷载按线性关系进行折减,一个截面对应一个等效荷载。例如:计算拱顶内力时的等效荷载采用顶面埋深 h_t ,计算拱脚内力时则采用底面埋深 h_b ,但当计算截面埋深超过 3 m 时,可不

考虑荷载等效,因为此时活载对波纹钢产生的荷载作用可忽略,即仅考虑拱顶位置的荷载等效而无需考虑其他位置。此外,荷载扩散角度因填筑材料的特性而改变,如钢筋混凝土的扩散角为 45°、素混凝土的扩散角为 30°等,需根据填筑的实际材料特性来确定荷载扩散角,这在活载影响深度范围内的波纹钢截面内力计算中至关重要。

3 结论

基于刚度等效原理提出埋置式波纹钢板的刚度等效方法,并建立 4 种数值分析模型对刚度等效方法进行验证,得到以下主要结论:

(1) 式(2)~(7)所示埋置式波纹钢板抗弯刚度计算方法及正交异性材料参数换算方法可行。

(2) 采用刚度等效方法建立壳单元和实体的三维数值模型均可很好地模拟波纹钢拱顶位置在外荷载作用下产生的变形与内力,与波纹钢壳模型计算结果的误差不超过±10%,不同模型的分析结果可根据式(8)、式(9)相互换算。

(3) 采用刚度等效方法分析波纹钢拱脚和拱肩位置的轴力与弯矩精度稍差,与波纹钢壳模型计算

(下转第 119 页)