DOI:10.20035/j.issn.1671－2668.2022.04.030

基于传递矩阵法的变截面梁自振特性分析*

肖勇刚，李龙

（长沙理工大学 土木工程学院，湖南 长沙 410114）

摘要：在传统传递矩阵法的基础上，结合龙格－库塔法推导自由振动下变截面梁的节段和整体传递矩阵，结合边界条件建立梁自振频率特征方程，运用 Wolfram Mathematic 编程软件求解其自振频率，确定其前 n 阶振型；应用该方法与有限元软件 ANSYS 计算 2 个变截面梁、2 个等截面梁的前 3 阶固有频率和振型并进行对比分析，结果表明该方法适用于所有变截面梁的自振特性分析，编程方便且计算精度高。

关键词：桥梁；传递矩阵法；变截面梁；自振特性分析；龙格－库塔法

中图分类号：U446.1 **文献标志码：**A **文章编号：**1671－2668(2022)04－0129－05

有限元法是研究变截面梁动力特性的主流方法，但采用有限元法分析时必须建立系统的整体刚度矩阵和总体动力学方程，单元划分精度也影响其计算结果，分析过程十分繁琐且计算效率低下。有别于有限元法，传递矩阵法不需要系统总体动力学方程，且计算快速，已被广泛应用于实际工程计算中。丁凯采用传递矩阵法研究了车辆作用下变截面简支梁桥的动力特性；Fang Z.、Ellakany A. M.等将传递矩阵法应用于梁式结构的振动分析中；孙建鹏等提出了一种分析连续刚构桥弹塑性区域的传递矩阵法；刘进等利用结构有限元结合声有限元及边界元方法，建立了任意薄壳腔体弹性壳板振动与内外声场的耦合模型，计算了激励力与壳板振动和内部声场之间的传递矩阵；胡齐笑等基于体积流连续原理，采用改进传递矩阵法，推导了多穿孔率复合微穿孔板吸声系数公式，探讨了多穿孔率对吸声性能的影响；仇磊等建立加速度计的传递矩阵法力学模型，分析了基于柔性铰链的 FBG 加速度计的力学传递关系和动态性能；邓韬等采用传递矩阵法对夹心式换能器的固有频率进行了分析；陈东阳等基于多体系统传递矩阵法建立舵系统动力学高效仿真模型，并与 ANSYS 软件的仿真结果进行了对比分析。以上研究充分发展了传递矩阵法，为分析变截面梁的动力问题提供了思路，但仍存在一些问题。该文在传统传递矩阵法的基础上，结合龙格－库塔法，提出变截面梁的节段单元传递矩阵和整体传递矩阵推导方法，考虑梁的边界条件，建立变截面梁自振频率特征方程，运用 Wolfram Mathematic 编程软件求出固有频率和振型，并以 2 个变截面梁和 2 个等截面梁为研究对象，采用文中方法与 ANSYS 计算前 3 阶固有频率和振型，验证文中方法的正确性。

1 节段单元传递矩阵推导方法

以变截面简支梁为例进行推导。建立变截面简支梁求解模型（见图 1），跨度为 l。根据截面形式的不同，将其分为 n 段，每个节段编号依次为 S_1，S_2，…，S_i，S_{i+1}，…，S_n，对应长度分别为 l_1，l_2，…，l_i，l_{i+1}，…，l_n。x_1，x_2，…，x_i，x_{i+1}，…，x_n 分别为节段 S_1，S_2，…，S_i，S_{i+1}，…，S_n 的右端到梁左端的距离。

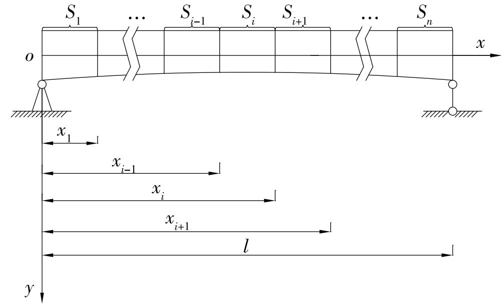


图 1 变截面简支梁求解模型

为说明同一节段内动力参数的关系，以节段 S_i 为研究对象（见图 2），令 $\xi = x - \sum_{k=1}^{i-1} l_k \ (0 \leqslant \xi \leqslant l_i)$。

* **基金项目：**国家自然科学基金项目（52078056）

取出微元体 $\mathrm{d}\xi$，其受力模式见图 3。

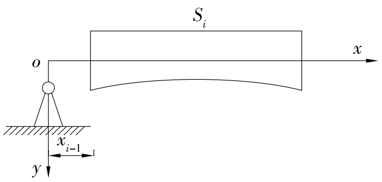
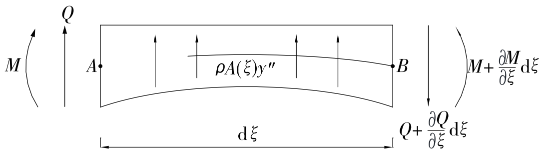


图 2　节段 S_i 示意图



M、Q 分别为弯矩和剪力；ρ 为材料密度；$A(x)$ 为结构的横截面积；y'' 为梁的竖向位移

图 3　微元体 $\mathrm{d}\xi$ 的受力模式示意图

根据竖向平衡条件，有：

$$[Q(\xi,t)+\rho A(\xi)y''\mathrm{d}\xi]-[Q(\xi,t)+\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi]=0 \tag{1}$$

简化式(1)，得：

$$\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}=\rho A(\xi)y'' \tag{2}$$

根据材料力学基本原理，有：

$$\frac{\partial M(\xi,t)}{\partial \xi}=Q(\xi,t) \tag{3}$$

$$M(\xi,t)=-EI(\xi)\frac{\partial \varphi(\xi,t)}{\partial \xi} \tag{4}$$

$$\varphi(\xi,t)=\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi} \tag{5}$$

式中：$\varphi(\xi,t)$ 为 t 时刻坐标 ξ 处的转角。

假定变截面简支梁桥在平衡位置作自由振动，有：

$$y(\xi,t)=\bar{y}(\xi)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{6}$$

$$\varphi(\xi,t)=\bar{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{7}$$

$$M(\xi,t)=\bar{M}(\xi)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{8}$$

$$Q(\xi,t)=\bar{Q}(\xi)\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{9}$$

式中：$\bar{y}(\xi)$、$\bar{\varphi}(\xi)$、$\bar{M}(\xi)$、$\bar{Q}(\xi)$ 为相应振型函数；ω 为梁的圆频率；$i^2=-1$。

分别将式(6)～(9)代入式(5)～(2)，得：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\bar{\varphi}(\xi) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{1}{EI(\xi)}\bar{M}(\xi) \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{M}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\bar{Q}(\xi) \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{Q}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=-\omega^2\rho A(\xi)\bar{y}(\xi) \tag{13}$$

令 $\{z(\xi)\}=[\bar{y}(\xi),\ \bar{\varphi}(\xi),\bar{M}(\xi)\ ,\bar{Q}(\xi)]^{\mathrm{T}}$，可将式(10)～(13)写成矩阵形式：

$$\frac{\mathrm{d}\{z(\xi)\}}{\mathrm{d}\xi}=[u(\xi)]\{z(\xi)\} \tag{14}$$

系数矩阵 $[u(\xi)]$ 如下：

$$[u(\xi)]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/EI(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2\rho A(\xi) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

将 ξ 处的动力参数向量记为 $\{z_i(\xi)\}$，则节段 S_i 左端的动力参数向量 $\{z_i(0)\}$ 为：

$$\{z_i(0)\}=[\bar{y}_i(0),\bar{\varphi}_i(0),\bar{M}_i(0),\bar{Q}_i(0)]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

令 $[T_i(\xi)]$ 为传递矩阵(特别地，$T_i(0)$ 为单位矩阵)，有：

$$\{z_i(\xi)\}=[T_i(\xi)]\{z_i(0)\} \tag{17}$$

将式(17)代入式(14)，得：

$$\frac{\mathrm{d}[T_i(\xi)]}{\mathrm{d}\xi}=[u_i(\xi)][T_i(\xi)] \tag{18}$$

由式(18)可确定 $[T_i(\xi)]$，代入式(17)，可求出 $\{z_i(\xi)\}$。由此，可建立节段 S_i 内任意位置处动力参数与 S_i 左端动力参数向量的关系。

下面采用四阶龙格－库塔法确定 $[T_i(\xi)]$。在 ξy 坐标系下，将节段 S_i 等分为 n 份，每等份的长度为 h。$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_j,\xi_{j+1},\cdots,\xi_n$ 为每段右端处的横坐标(见图 4)。令：

$$u_2^i(\xi)=-\frac{1}{EI(\xi)} \tag{19}$$

$$u_4^i(\xi)=-\omega^2\rho A(\xi) \tag{20}$$

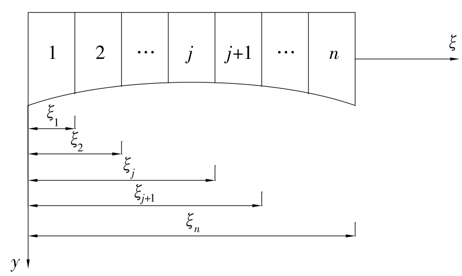


图 4　节段 S_i 划分示意图

采用 $T^i_{\alpha,\beta}(\xi)$ 表示传递矩阵 $[T_i(\xi)]$ 中任意元

素，α、β 分别表示元素的行和列，α、$\beta=1,2,3,4$。采用$\{TT^i_{\alpha,\beta}(\xi)\}$表示由元素 $T^i_{\alpha,\beta}(\xi)$ 构成的列向量。令：

$$[f(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})]=[u_i(\xi)][T_i(\xi)]=$$
$$\begin{bmatrix} f_{1,1}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{1,2}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{1,3}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{1,4}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) \\ f_{2,1}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{2,2}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{2,3}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{2,4}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) \\ f_{3,1}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{3,2}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{3,3}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{3,4}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) \\ f_{4,1}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{4,2}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{4,3}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) & f_{4,4}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) \end{bmatrix} \tag{22}$$

结合式(18)～(20)，有：

$$\begin{cases} f_{1,\lambda}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})=T^i_{2,\lambda}(\xi) \\ f_{2,\lambda}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})=u^i_2(\xi)T^i_{3,\lambda}(\xi) \\ f_{3,\lambda}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})=T^i_{4,\lambda}(\xi) \\ f_{4,\lambda}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})=u^i_4(\xi)T^i_{1,\lambda}(\xi) \end{cases} \tag{23}$$

式(18)可改写为：

$$\frac{\mathrm{d}\{TT^i_{\alpha,\beta}\}}{\mathrm{d}\xi}=f_{\alpha,\beta}(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\}) \tag{24}$$

由式(23)、式(24)可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T^i_{1,\lambda}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=T^i_{2,\lambda}(\xi) \\ \dfrac{\mathrm{d}T^i_{2,\lambda}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=u^i_2(\xi)T^i_{3,\lambda}(\xi) \\ \dfrac{\mathrm{d}T^i_{3,\lambda}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=T^i_{4,\lambda}(\xi) \\ \dfrac{\mathrm{d}T^i_{4,\lambda}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=u^i_4(\xi)T^i_{1,\lambda}(\xi) \end{cases} \tag{25}$$

四阶龙格－库塔法的递推公式为：

$$T^i_{\alpha,\beta}(\xi_{i+1})=T^i_{\alpha,\beta}(\xi_i)+\frac{h}{6}(K^1_{\alpha,\beta}+2K^2_{\alpha,\beta}+2K^3_{\alpha,\beta}+K^4_{\alpha,\beta}) \tag{26}$$

得：

$$\begin{cases} K^1_{1,\lambda}=T^i_{2,\lambda}(\xi_j) \\ K^2_{1,\lambda}=f_{1,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{1,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^1_{1,\lambda}) \\ K^3_{1,\lambda}=f_{1,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{1,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^2_{1,\lambda}) \\ K^4_{1,\lambda}=f_{1,\lambda}(\xi_j+h,T^i_{1,\lambda}(\xi_j)+hK^3_{1,\lambda}) \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} K^1_{2,\lambda}=u^i_2(\xi_j)T^i_{3,\lambda}(\xi_j) \\ K^2_{2,\lambda}=f_{2,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{2,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^1_{2,\lambda}) \\ K^3_{2,\lambda}=f_{2,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{2,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^2_{2,\lambda}) \\ K^4_{2,\lambda}=f_{2,\lambda}(\xi_j+h,T^i_{2,\lambda}(\xi_j)+hK^3_{2,\lambda}) \end{cases} \tag{28}$$

$$[f(\xi,\{TT^i_{\alpha,\beta}\})]=\frac{\mathrm{d}[T_i(\xi)]}{\mathrm{d}\xi} \tag{21}$$

将式(21)代入式(18)，得：

$$\begin{cases} K^1_{3,\lambda}=T^i_{4,\lambda}(\xi_j) \\ K^2_{3,\lambda}=f_{3,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{3,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^1_{3,\lambda}) \\ K^3_{3,\lambda}=f_{3,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{3,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^2_{3,\lambda}) \\ K^4_{3,\lambda}=f_{3,\lambda}(\xi_j+h,T^i_{3,\lambda}(\xi_j)+hK^3_{3,\lambda}) \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} K^1_{4,\lambda}=u^i_4(\xi)T^i_{1,\lambda}(\xi_j) \\ K^2_{4,\lambda}=f_{4,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{4,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^1_{4,\lambda}) \\ K^3_{4,\lambda}=f_{4,\lambda}(\xi_j+\dfrac{h}{2},T^i_{4,\lambda}(\xi_j)+\dfrac{h}{2}K^2_{4,\lambda}) \\ K^4_{4,\lambda}=f_{4,\lambda}(\xi_j+h,T^i_{4,\lambda}(\xi_j)+hK^3_{4,\lambda}) \end{cases} \tag{30}$$

式(26)～(30)表示 $T^i_{\alpha,\beta}(\xi_j)$ 与 $T^i_{\alpha,\beta}(\xi_{j+1})$ 之间的关系，可根据式(26)～(30)计算节段 S_i 内任意位置的矩阵值。

2　整体传递矩阵推导及自振特性分析方法

由上述方法可确定节段任意位置传递矩阵的值，节段 S_{i+1} 右端动力参数与节段 S_i 左端动力参数之间的关系可用下式表示：

$$\{z_{i+1}(l_{i+1})\}=[T_{i+1}(l_{i+1})][T_i(l_i)]\{z_i(0)\} \tag{31}$$

以式(31)的形式递推，可得到全桥右端与全桥左端动力参数之间的关系：

$$\{z_n(l_n)\}=[T_n(l_n)]\cdots[T_i(l_i)]\cdots[T_1(l_1)]\{z_1(0)\} \tag{32}$$

令全桥整体传递矩阵$[T]$为：

$$[T]=[T_n(l_n)]\cdots[T_i(l_i)]\cdots[T_1(l_1)] \tag{33}$$

将式(33)代入式(32)，得：

$$\{z_n(l_n)\}=[T]\{z_1(0)\} \tag{34}$$

令：

$$[T]=[\{t_1\},\{t_2\},\{t_3\},\{t_4\}]^{\mathrm{T}} \tag{35}$$

结合变截面梁的边界条件，对于简支梁，有：

$$\bar{y}_1(0)=\bar{y}_n(l_n)=\bar{M}_1(0)=\bar{M}_n(l_n)=0 \quad (36)$$

式中：$\bar{y}_1(0)$、$\bar{y}_n(l_n)$分别为梁首末位置的竖向位移值；$\bar{M}_1(0)$、$\bar{M}_n(l_n)$分别为梁首末位置的弯矩值。

对于其他类型梁，如悬臂梁、两端固定梁等，根据相应边界条件确定式(36)。

综合式(35)、式(36)，得：

$$\bar{y}_n(l_n)=\{t_1\}\{z_1(0)\}=0 \quad (37)$$

$$\bar{M}_n(l_n)=\{t_3\}\{z_1(0)\}=0 \quad (38)$$

令：

$$\begin{cases}\{tt_1\}=[1,0,0,0]\\ \{tt_3\}=[0,0,1,0]\end{cases} \quad (39)$$

则有：

$$\bar{y}_1(0)=\{tt_1\}\{z_1(0)\}=0 \quad (40)$$

$$\bar{M}_1(0)=\{tt_3\}\{z_1(0)\}=0 \quad (41)$$

令：

$$[H]=[\{t_1\},\{t_3\},\{tt_1\},\{tt_3\}]^{\mathrm{T}} \quad (42)$$

则有：

$$[H]\{z_1(0)\}=0 \quad (43)$$

特征方程为：

$$|H|=0 \quad (44)$$

运用 Wolfram Mathematic 编程软件计算固有频率 ω，将其代入式(43)即可解得相应$\{z_1(0)\}$。结合式(31)，代入$\{z_1(0)\}$，即可求出简支梁桥的对应阶振型值。

3 算例分析

通过计算 2 个变截面梁(拱形简支梁和两端固定变截面梁)、2 个等截面简支梁的自振特性并与有限元软件 ANSYS 分析结果对比验证上述方法的正确性。计算模型见图 5～8。

桥梁参数如下：材料密度 $\rho=2\ 400\ \mathrm{kg/m^3}$，弹性模量 $E=3.25\times10^{10}$ Pa，泊松比 $\upsilon=0.3$，横截面均为矩形，梁的宽度$b=0.3$ m。拱形简支梁、两端固定变截面梁和等截面简支梁 A 的跨度为 $l_1=l_2=l_3=16$ m，等截面简支梁 B 的跨度 $l_4=30$ m，拱形简支梁的圆弧半径 $R=106.82$ m。

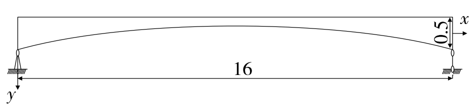


图 5 拱形简支梁计算模型(单位：m)

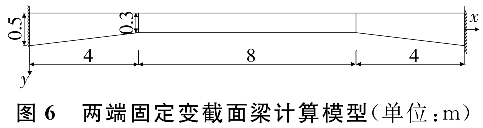


图 6 两端固定变截面梁计算模型(单位：m)

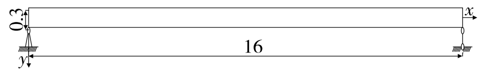


图 7 等截面简支梁 A 计算模型(单位：m)

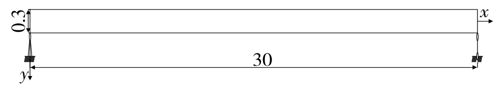


图 8 等截面简支梁 B 计算模型(单位：m)

前 3 阶固有频率计算结果见表 1～ 4。限于篇幅，只给出拱形简支梁前 3 阶振型图(见图 9)。

由表 1～4、图 9 可知：采用文中方法计算的桥梁前 3 阶固有频率及振型结果整体上与 ANSYS 分析结果十分接近；运用文中方法计算等截面梁的精度高于变截面梁；桥梁跨度和形状影响文中方法的精度(这与该方法的假定有关)，梁的跨度越小，该方法越精确。

表 1 拱形简支梁的前 3 阶固有频率计算结果

阶次	固有频率/(rad·s^{-1})		误差/%
	文中方法	有限元法	
1	9.092 2	9.103 1	0.12
2	42.613 5	42.733 2	0.28
3	101.602 7	102.164 6	0.55

表 2 两端固定变截面梁的前 3 阶固有频率计算结果

阶次	固有频率/(rad·s^{-1})		误差/%
	文中方法	有限元法	
1	40.895 3	40.928 0	0.08
2	97.669 9	97.816 6	0.15
3	180.404 1	181.219 6	0.45

表 3 等截面简支梁 A 的前 3 阶固有频率计算结果

阶次	固有频率/(rad·s^{-1})		误差/%
	文中方法	有限元法	
1	12.275 5	12.279 2	0.03
2	48.976 3	49.030 2	0.11
3	109.641 5	109.993 4	0.32

表 4 等截面简支梁 B 的前 3 阶固有频率计算结果

阶次	固有频率/(rad·s^{-1})		误差/%
	文中方法	有限元法	
1	3.489 0	3.494 2	0.15
2	13.926 7	13.970 2	0.31
3	31.176 6	31.405 9	0.73

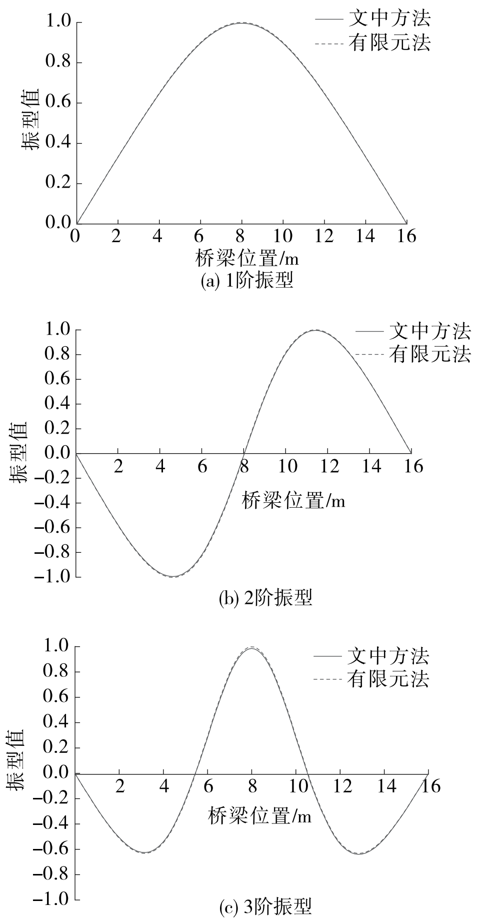


图 9　拱形简支梁的前 3 阶振型

4　结语

在传统传递矩阵法的基础上，采用龙格－库塔法，提出一种计算变截面梁自振特性的方法。该方法适用于所有变截面梁的固有频率及振型计算，编程方便，求解快速，且不需要计算质量矩阵和刚度矩阵。与有限元法相比，可大大减少分析过程中矩阵相乘次数，提高计算精度，节省计算时间。该方法为发展传递矩阵法提供了一种新思路，具有一定的理论和工程实践应用前景。

参考文献：

[1]　王渊，张松涵，王路.基于传递矩阵法的变截面连续梁动力分析方法[J].重庆交通大学学报（自然科学版），2017，36(3)：1－7.

[2]　芮筱亭，戎保.多体系统传递矩阵法研究进展[J].力学进展，2012，42(1)：4－17.

[3]　RUI X T，WANG G P，LU Y Q.Transfer matrix method for linear multi-body system[J].Multi-body System Dynamics，2008，19(3)：179－207.

[4]　丁凯.车辆作用下变截面简支梁桥动力特性及动力响应分析[D].长春：吉林大学，2018.

[5]　FANG Z.Dynamic analysis of structures with uncertain parameter using the transfer matrix method[J]. Computers & Structures，1995，55(6)：1037－1047.

[6]　ELLAKANY A M，ELAWADLY K M，ALHAMAKY B N.A combined transfer matrix and analogue beam method for free vibration analysis of composite beams [J].Journal of Sound & Vibration，2004，277(4－5)：765－781.

[7]　孙建鹏，刘银涛，周鹏，等.连续刚构桥弹塑性力学行为分析的传递矩阵法[J].振动与冲击，2020，39(22)：234－242.

[8]　刘进，沈琪，俞孟萨.传递矩阵法预报时空随机激励下任意薄壳腔体内部噪声[J].声学学报，2020，45(6)：840－848.

[9]　胡齐笑，丁善婷，刘荻.改进型传递矩阵法的多穿孔率复合微穿孔板吸声性能研究[J].机械科学与技术，2020，39(11)：1774－1781.

[10]　仇磊，梁磊，蔡彦璞，等.传递矩阵法分析 FBG 加速度计的动态性能[J].机械设计与制造，2020(8)：76－79.

[11]　邓韬，卢钰仁.基于传递矩阵法的夹心式换能器固有频率分析[J].仪表技术与传感器，2020(5)：88－92.

[12]　陈东阳，肖清，谢俊超，等.基于多体系统传递矩阵法的舵系统振动特性分析[J].哈尔滨工程大学学报，2020，41(2)：184－193.

[13]　王晓佳，张瀚钊，张祖军.地锚式独斜塔混凝土斜拉桥抗震性能[J].交通科学与工程，2021，37(4)：101－107.

[14]　兰玮琦，姚激，黄坤.考虑剪滞效应和剪切变形的曲线箱梁自振研究[J].交通科学与工程，2020，36(4)：61－68.

收稿日期：2021－03－25

（上接第 128 页）

[9]　徐朔，虢曙安，吴文鹏.超大跨度双跨钢桁梁悬索桥动力特性分析和模态试验[J].公路工程，2020，45(1)：1－5＋11.

[10]　陶悦.基于环境激励的模态参数识别方法综述[J].科技风，2010(18)：276.

[11]　徐士代.环境激励下工程结构模态参数识别[D].长沙：中南大学，2006.

[12]　方珠芳.MGK7350 平面磨床的试验模态分析与磨头部件的结构改进[D].杭州：浙江工业大学，2010.

收稿日期：2022－01－23