

DOI: 10.20035/j.issn.1671-2668.2024.03.022

引用格式: 张杨. 基于应力平衡法的钢箱拱桥索力确定方法研究[J]. 公路与汽运, 2024, 40(3): 104-107+127.

Citation: ZHANG Yang. Research on determination method of cable force of steel case arch bridge based on stress balance method[J]. Highways &amp; Automotive Applications, 2024, 40(3): 104-107+127.

## 基于应力平衡法的钢箱拱桥索力确定方法研究\*

张杨

(长沙开福城投集团有限责任公司, 湖南 长沙 410117)

**摘要:** 千斤顶、拉索扣挂悬臂拼装施工方法广泛应用于拱桥拱肋吊装, 其中扣索索力确定是关键。文中推导采用应力平衡法求解索力的公式, 采用刚性支撑连续梁法确定控制应力, 最后采用最小二乘法对索力进行调整, 并编制悬臂拼装拱桥应力平衡法施工控制计算分析程序; 以云南省小湾大桥拱肋吊装为例验证应力平衡法确定索力方法的可行性, 结果表明, 应力平衡法预测索力与实测值接近, 可用于指导拱桥拱肋吊装施工。

**关键词:** 桥梁; 钢箱拱桥; 拱肋吊装; 应力平衡法

中图分类号: U441.5

文献标志码: A

文章编号: 1671-2668(2024)03-0104-04

采用千斤顶、拉索扣挂悬臂拼装方法进行拱桥拱肋吊装时扣索索力及拱肋吊装标高确定是关键<sup>[1]</sup>。目前根据工程实际情况开发了多种计算方法, 如力矩平衡原理、零弯矩法、零位移法、定长扣锁法、应力平衡法等, 其中应力平衡法通过建立索力与控制截面应力之间的关系式, 借助数学方法确定索力, 能保证截面应力在材料强度允许范围内, 确保结构安全<sup>[2-4]</sup>。本文基于应力平衡法研究钢箱拱桥扣索索力确定方法。

## 1 拱肋计算模型

大多数桥梁可合理简化为杆件模型, 尤其是大跨径桥梁, 这是因为这类桥梁的纵向尺寸远大于横向尺寸, 采用杆件分析能有效减小误差。建立图1所示拱肋简化计算模型, 模型中用拉索索力代替拉力的作用。

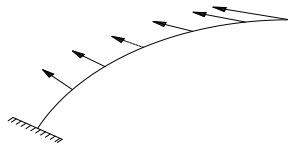


图1 拱肋计算模型

## 2 索力确定方法

## 2.1 拱肋截面上下缘应力控制条件

拱肋关键截面上下缘在恒载和施工临时荷

载(一般只计算索力)组合作用下的最大应力 $\sigma^{sl}$ 、 $\sigma^{xl}$ 应满足式(1)、式(2)的要求, 最小应力 $\sigma^{sa}$ 、 $\sigma^{xa}$ 应满足式(3)、式(4)的要求。

$$\sigma^{sl} = -\frac{N_d}{A} - \frac{M_d}{W_s} \leq [\sigma^l] \quad (1)$$

$$\sigma^{xl} = -\frac{N_d}{A} + \frac{M_d}{W_x} \leq [\sigma^l] \quad (2)$$

式中:  $\sigma^{sl}$ 为拱肋自质量和临时荷载在拱肋上缘产生的应力;  $N_d = N_g + N_s$ ;  $N_g$ 为拱肋自质量在关键截面产生的轴力(以压力为正);  $N_s$ 为拱肋临时荷载(挂索拉力)在关键截面产生的轴力(以压力为正);  $A$ 为拱肋截面面积;  $M_d = M_g + M_s$ ;  $M_g$ 为拱肋自质量在关键截面产生的弯矩(以使拱肋下缘产生拉应力为正);  $M_s$ 为拱肋临时荷载(挂索拉力)在关键截面产生的弯矩(以使拱肋下缘产生拉应力为正);  $W_s$ 为拱肋截面上缘抗弯截面模量;  $[\sigma^l]$ 为拱肋材料所能承受的允许拉应力;  $\sigma^{xl}$ 为拱肋自质量和临时荷载在拱肋下缘产生的应力;  $W_x$ 为拱肋截面下缘抗弯截面模量。

$$\sigma^{sa} = -\frac{N_d}{A} - \frac{M_d}{W_s} \geq [\sigma^a] \quad (3)$$

$$\sigma^{xa} = -\frac{N_d}{A} + \frac{M_d}{W_x} \geq [\sigma^a] \quad (4)$$

式中:  $\sigma^{sa}$ 为拱肋上缘承受的允许压应力;  $[\sigma^a]$ 为拱肋

\* 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52278139)

材料所能承受的允许压应力; $\sigma^{\text{sa}}$ 为拱肋下缘承受的允许压应力。

由式(1)、式(2)得拱肋拉应力控制条件如下:

$$\sigma^{\text{sl}} = -\frac{N_g + N_s}{A} - \frac{M_g + M_s}{W_s} \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (5)$$

$$\sigma^{\text{xl}} = -\frac{N_g + N_s}{A} + \frac{M_g + M_s}{W_x} \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (6)$$

由式(5)得:

$$\sigma^{\text{sl}} = -\left(\frac{N_g}{A} + \frac{M_g}{W_s}\right) - \left(\frac{N_s}{A} + \frac{M_s}{W_s}\right) \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (7)$$

即:

$$\sigma^{\text{sl}} = \sigma_{\text{slg}} + \sigma_{\text{sls}} \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (8)$$

由式(6)得:

$$\sigma^{\text{xl}} = \left(-\frac{N_g}{A} + \frac{M_g}{W_x}\right) + \left(-\frac{N_s}{A} + \frac{M_s}{W_x}\right) \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (9)$$

即:

$$\sigma^{\text{xl}} = \sigma_{\text{xlg}} + \sigma_{\text{xls}} \leq [\sigma^{\text{l}}] \quad (10)$$

同理,由式(3)、式(4)得拱肋压应力控制条件如下:

$$\sigma^{\text{sa}} = \sigma_{\text{sag}} + \sigma_{\text{sas}} \geq [\sigma^{\text{a}}] \quad (11)$$

$$\sigma^{\text{xa}} = \sigma_{\text{xag}} + \sigma_{\text{xas}} \geq [\sigma^{\text{a}}] \quad (12)$$

考虑到拱肋吊装施工会受其他因素(如车辆荷载等)影响,选择的控制应力不得高于拱肋材料的强度设计值。悬臂施工时,自质量荷载导致拱肋截面上缘产生拉应力、下缘产生压应力,拉索索力旨在抵消由自质量荷载导致的拱肋截面拉应力和压应力。

## 2.2 拱肋截面最小索力

假设拱肋吊装一半结构共有  $n$  段,每段拱肋选择一个控制截面,则共有  $n$  根挂索、 $n$  个控制截面,将应力平衡条件即式(8)、式(10)~(12)写成矩阵形式:

$$\{\sigma^{\text{sl}}\} = \{\sigma^{\text{sg}}\} + [\sigma^{\text{ss}}]\{T\} \leq \{\sigma^{\text{l}}\} \quad (13)$$

$$\{\sigma^{\text{xl}}\} = \{\sigma^{\text{xg}}\} + [\sigma^{\text{xs}}]\{T\} \leq \{\sigma^{\text{l}}\} \quad (14)$$

$$\{\sigma^{\text{sa}}\} = \{\sigma^{\text{sg}}\} + [\sigma^{\text{ss}}]\{T\} \geq \{\sigma^{\text{a}}\} \quad (15)$$

$$\{\sigma^{\text{xa}}\} = \{\sigma^{\text{xg}}\} + [\sigma^{\text{xs}}]\{T\} \geq \{\sigma^{\text{a}}\} \quad (16)$$

式中: $[\sigma^{\text{ss}}]$ 为拱肋上边缘临时荷载的允许应力; $T$ 为索力; $\{\sigma^{\text{l}}\}$ 、 $\{\sigma^{\text{a}}\}$ 分别为拱肋截面所承受拉应力和压应力的控制值; $[\sigma^{\text{xs}}]$ 为拱肋下边缘临时荷载的允许应力。

在拉索至拱脚范围,索力  $T_i$  只影响第  $i$  根拉索的截面应力;在拉索至跨中范围,索力  $T_i$  对第  $i$  根拉索的截面应力没有影响,即 $[\sigma^{\text{xs}}]$ 及 $[\sigma^{\text{ss}}]$ 对角线以下的元素都为零。另外,拉索索力作用在拱肋截面

上缘,截面中产生轴向压力和弯矩,压应力总是出现在拱肋截面下缘,拉应力则总是出现在拱肋截面上缘。式(13)可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{sl}} \\ \sigma_2^{\text{sl}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{sl}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{sg}} \\ \sigma_2^{\text{sg}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{sg}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\text{ss}} & \sigma_{12}^{\text{ss}} & \cdots & \sigma_{1n}^{\text{ss}} \\ 0 & \sigma_{22}^{\text{ss}} & \cdots & \sigma_{2n}^{\text{ss}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn}^{\text{ss}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{l}} \\ \sigma_2^{\text{l}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{l}} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

式(14)可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{xl}} \\ \sigma_2^{\text{xl}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{xl}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{xg}} \\ \sigma_2^{\text{xg}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{xg}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\text{xs}} & \sigma_{12}^{\text{xs}} & \cdots & \sigma_{1n}^{\text{xs}} \\ 0 & \sigma_{22}^{\text{xs}} & \cdots & \sigma_{2n}^{\text{xs}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn}^{\text{xs}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{l}} \\ \sigma_2^{\text{l}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{l}} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

式(15)可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{sa}} \\ \sigma_2^{\text{sa}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{sa}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{sg}} \\ \sigma_2^{\text{sg}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{sg}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\text{ss}} & \sigma_{12}^{\text{ss}} & \cdots & \sigma_{1n}^{\text{ss}} \\ 0 & \sigma_{22}^{\text{ss}} & \cdots & \sigma_{2n}^{\text{ss}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn}^{\text{ss}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{a}} \\ \sigma_2^{\text{a}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{a}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

式(16)可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{xa}} \\ \sigma_2^{\text{xa}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{xa}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{xg}} \\ \sigma_2^{\text{xg}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{xg}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{\text{xs}} & \sigma_{12}^{\text{xs}} & \cdots & \sigma_{1n}^{\text{xs}} \\ 0 & \sigma_{22}^{\text{xs}} & \cdots & \sigma_{2n}^{\text{xs}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn}^{\text{xs}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} \sigma_1^{\text{a}} \\ \sigma_2^{\text{a}} \\ \vdots \\ \sigma_n^{\text{a}} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中: $\sigma_i^{\text{sg}} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ;  $\sigma_i^{\text{xg}} < 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ;  $\sigma_i^{\text{l}} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ;  $\sigma_i^{\text{a}} < 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ;  $\sigma_{ij}^{\text{ss}} < 0 (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n; j > i)$ ;  $\sigma_{ij}^{\text{xs}} < 0 (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n; j > i)$ 。

令:

$$\sigma_i^{\text{l}'} = \sigma_i^{\text{l}} - \sigma_i^{\text{sg}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

$$\sigma_i^{\text{a}'} = \sigma_i^{\text{a}} - \sigma_i^{\text{xg}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

则:

$$[\sigma^{\text{ss}}][T] \leq [\sigma^{\text{l}'}] \quad (23)$$

$$[\sigma^{\text{xs}}][T] \geq [\sigma^{\text{a}'}] \quad (24)$$

通过式(23)、式(24)可以确定索力最小值,求解方法如下:先计算最后一根拉索  $n$  的索力最小值,再依次计算  $n-1$  根、 $n-2$  根直至第一根拉索的索力最小值。最后一根拉索  $n$  的索力按式(25)~(26)计算,取  $T_n^{\text{a}}$  和  $T_n^{\text{b}}$  中的较大值作为索力  $T_n$  的最小值[见式(27)]。

$$T_n \geq \frac{\sigma_n'}{\sigma_{nn}} = T_n^a \quad (25)$$

$$T_n \geq \frac{\sigma_n^a}{\sigma_{nn}} = T_n^b \quad (26)$$

$$T_n^{\min} = \max(T_n^a, T_n^b) \quad (27)$$

按式(28)~(29)计算所有拉索索力,取  $T_i^a$  和  $T_i^b$  中的较大值作为索力  $T_i$  的最小值[见式(30)]。

$$T_i \geq \frac{\sigma_i' - \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}^{ss} T_j^{\min}}{\sigma_{ii}^{ss}} = T_i^a \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1) \quad (28)$$

$$T_i \geq \frac{\sigma_i^a - \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}^{xs} T_j^{\min}}{\sigma_{ii}^{xs}} = T_i^b \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1) \quad (29)$$

$$T_i^{\min} = \max(T_i^a, T_i^b) \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1) \quad (30)$$

若按式(30)求得  $T_i^{\min} < 0$ , 则取  $T_i^{\min} = 0$ , 表示不需要这根拉索的索力。按照上述方法确定每根拉索的索力最小值, 得到最小索力  $\{T^{\min}\}$ :

$$\{T^{\min}\} = \{T_1^{\min}, T_2^{\min}, \dots, T_n^{\min}\}^T \quad (31)$$

### 2.3 合理应力控制目标确定

使用应力平衡法求解索力时须合理选择拱肋截面的控制应力, 拱肋截面承受的拉应力和压应力控制值  $\{\sigma^l\}$  和  $\{\sigma^a\}$  一般取 50% 强度设计值, 不同拱肋界面的应力控制值可以不同。本文采用刚性支撑连续梁法确定控制应力。

应力平衡法合理应力控制目标实现步骤: 带有扣索的裸拱结构中, 把扣索模拟成刚性支撑, 即扣索的抗弯刚度很小, 抗拉抗压刚度很大(抗压强度比真实值大 1 000 倍以上); 拱肋的抗弯刚度及抗拉抗压刚度依照实际情况确定。在自质量作用下, 刚性支撑连续梁法所求关键截面的上缘应力  $\{\sigma^{sr}\}$  为:

$$\{\sigma^{sr}\} = \{\sigma_1^{sr}, \sigma_2^{sr}, \dots, \sigma_n^{sr}\}^T \quad (32)$$

刚性支撑连续梁法所求关键截面的下缘应力  $\{\sigma^{xr}\}$  为:

$$\{\sigma^{xr}\} = \{\sigma_1^{xr}, \sigma_2^{xr}, \dots, \sigma_n^{xr}\}^T \quad (33)$$

当所求索力为最小允许值时, 应力平衡法所得关键截面上缘控制应力  $\{\sigma^{sh}\}$  为:

$$\{\sigma^{sh}\} = \min(\{\sigma^{sr}\}, 50\% \{\sigma^l\}) \quad (34)$$

应力平衡法所得关键截面下缘控制应力  $\{\sigma^{xh}\}$  为:

$$\{\sigma^{xh}\} = \max(\{\sigma^{xr}\}, 50\% \{\sigma^a\}) \quad (35)$$

### 2.4 基于最小二乘法的索力调整

采用最小二乘法调整索力<sup>[5-7]</sup>。假设目前有

$n$  根需要张拉的拉索, 共有  $n$  个参数需要控制。按照设计要求, 选择最小索力向量  $\{T^{\min}\}_{n \times 1}$ , 采用上述方法进行分析, 当成桥达到裸拱状态时, 通过计算得到状态控制参数  $\{F\}_{k \times 1}$  (控制参数包括成桥裸拱状态时应力和标高等)。正装计算过程中, 对一根索进行张拉(假设为第  $j$  根索)时, 可得到第  $j$  根索张拉单位力对第  $i$  个索力影响系数的增量  $a_{ij}$ 。确定控制目标值  $\{F_0\}_{k \times 1}$  后, 则控制参数偏差为:

$$\{\omega\} = \{F_0\} - \{F\} \quad (36)$$

假定  $\{\Delta T\}$  代表张拉索力的调整量, 则:

$$[a]\{\Delta T\} = \{\Delta \omega\} \quad (37)$$

式中:  $[a]$  为系数矩阵列;  $[\Delta \omega]$  为控制目标。

引入控制目标  $\{\Delta \omega\}$ , 使各种可能起控制作用的物理量都能在计算中考虑到, 从而使式(37)成为超定方程组, 采用最小二乘法便可求得广义解  $\Delta T$ , 并满足:

$$Q\{\Delta T\} = \|[a]\{\Delta T\} - \{\Delta \omega\}\|^2 = \min\left(\sum_{i=1}^k [\Delta \omega_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta T_j]^2\right) \quad (38)$$

式中:  $Q$  为含有  $\{\Delta T\}$  的表达式。

根据极值原理, 满足式(38)的最小  $\Delta T_m$  必须满足下式:

$$\frac{\partial Q\{\Delta T\}}{\partial \Delta T_m} = 2 \sum_{i=1}^k \left\{ [\Delta \omega_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta T_j] \cdot (-a_{im}) \right\} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (39)$$

式(39)可转换为:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^k (a_{im} a_{ij}) \cdot \Delta T_j \right] = \sum_{i=1}^k a_{im} \cdot \Delta \omega_i \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

将式(40)写成矩阵形式:

$$[a]^T [a] \{\Delta T\} = [a]^T \{\Delta \omega\} \quad (41)$$

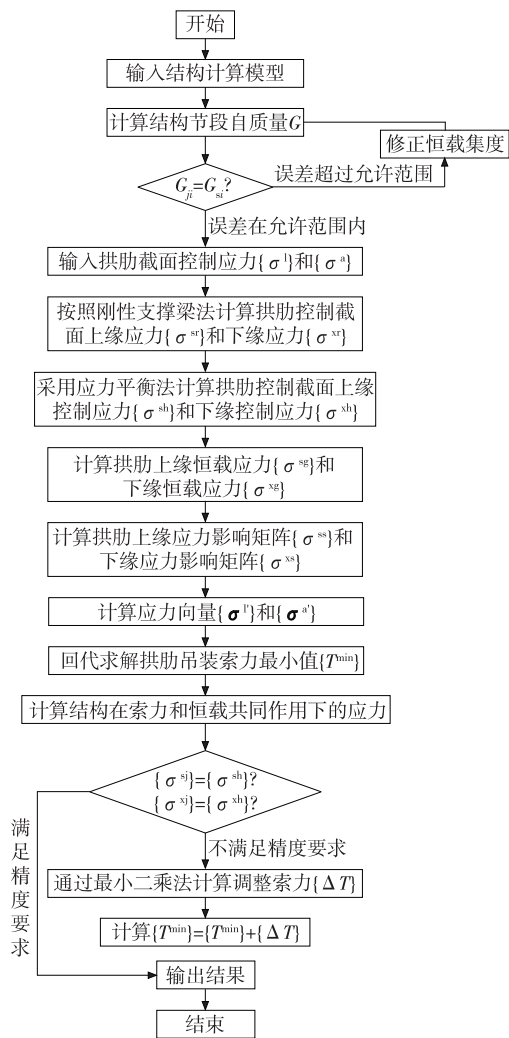
上述  $n$  个方程构成一个包含  $n$  个未知索力调整量的线性方程组, 当该线性方程组的系数矩阵列  $[a]$  满秩即系数矩阵的各列线性无关时, 方程组有唯一解。根据这一结论, 式(41)有唯一解  $\{\Delta T\}$ 。新的索力可表示为:

$$\{T_2\} = \{T_1\} + \{\Delta T\} \quad (42)$$

重复上述过程, 直到各控制参数满足精度要求及应力控制条件即收敛准则, 得到最终索力。

## 3 拱肋节段吊装控制程序编制及实例分析

基于应力平衡法及最小二乘法编制图 2 所示悬臂拼装拱桥施工控制计算分析程序。



$G_{ji}$  为第  $j$  根拉索第  $i$  个节段的截面受力; $G_{si}$  为  $i$  个阶段承受的恒载

图 2 悬臂拼装拱桥应力平衡法施工控制计算分析程序

以云南省小湾大桥拱肋吊装为例,采用上述方法确定索力。小湾大桥为跨径 130 m 悬链线无铰提篮拱桥<sup>[8-10]</sup>,采用变截面混凝土箱形拱肋(见图 3)。使用图 2 所示计算分析程序,按照施工步骤,考虑结构自质量计算各施工阶段扣索索力及相应控制点标高变化量,并求得累计值。计算中整个结构视为匀质弹性体,采用钢材,钢材的弹性模量为  $2.1\times 10^8$  kPa,泊松比为 0.167。利用拉索的力替代拉索的作用,不考虑拉索的几何非线性影响。拱脚、扣挂拱箱段、扣挂接头截面采用固结处理。使用足够小的单元(X 坐标间距为 0.4 m 的等截面单元)模拟拱肋,其中每个单元的几何特性为平均几何特性。



图 3 云南省小湾大桥示意图

采用上述方法计算该桥索力和位移,最大悬臂状态下扣索索力和高程计算结果及与长沙理工大学小湾大桥课题组预测索力、实测索力的比较见表 1,其中高程是以假定设计高程为零计算得到。

由表 1 可知:实测索力小于课题组的预测索力,应力平衡法计算索力与实测索力接近;应力平衡法计算位移与课题组预测位移和实测位移接近,总体来说,实测位移大于预测位移,应力平衡法计算位移大于预测位移,这是因为应力平衡法计算索力略小于课题组预测索力。

表 1 应力平衡法计算结果及与课题组研究成果和实测值的对比

索号	索力/kN			位移/mm		
	应力平衡法计算结果	课题组预测结果	实测值	应力平衡法计算结果	课题组预测结果	实测值
A	172.64	193.60	152.70	0.64	0.37	1.02
B	196.40	280.30	247.40	1.24	0.60	2.50
C	209.24	322.30	270.30	3.69	2.25	3.64
D	241.41	327.80	287.20	10.52	8.52	8.22
E	389.80	398.90	363.53	25.67	24.73	25.08
F	488.93	491.90	401.40	40.32	39.62	42.57

4 结语

本文从应力平衡条件的数学公式出发,推导拱桥拱肋吊装中采用应力平衡法求解索力的公式,并提出使用刚性支撑连续梁法确定应力平衡法控制应

力的方法。针对计算索力不均匀的现象,采用最小二乘法进行索力调整。最后按照应力平衡法的整体思路编制拱桥吊装施工控制程序。算例计算结果与实测值接近,应力平衡法计算结果在工程精度要求

(下转第 127 页)