

灰色一马尔科夫模型在边坡位移变形预测中的应用

宋文¹, 张满想², 朱宝柱^{2,3}

(1.湖南理大交通科技发展有限公司, 湖南 长沙 410001; 2.长沙理工大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410114;

3.中国市政工程中南设计研究总院有限公司, 湖北 武汉 430010)

摘要:以湖南省怀新(怀化—新晃)高速公路 K1469+545—745 边坡为研究对象,分别采用灰色 GM(1,1)和灰色一马尔科夫模型对边坡位移实测数据进行建模分析,计算边坡位移变形预测值,并分析两种模型的预测精度,进而确定两种模型的预测适用时间。结果显示,灰色 GM(1,1)模型适用于 4 个月内边坡位移预测;灰色一马尔科夫模型可用于 9 个月内边坡位移预测,且预测时间内边坡稳定。

关键词:公路;边坡;位移;变形;GM(1,1)模型;灰色一马尔科夫模型

中图分类号:U416.1

文献标志码:A

文章编号:1671-2668(2018)06-0062-04

边坡的稳定性直接关乎路面设施及行车、行人的安全。边坡安全监测能及时反映被监测区域在不同时间的真实状态,为边坡现状分析和状态预测提供依据。目前根据边坡监测数据进行位移变形预测的方法有人工预测模型和回归预测方法,这些预测方法易陷入局部极值,同时需要大量样本来保证其预测精度。为减少预测误差,该文结合具体工程监测数据,采用灰色一马尔科夫模型对边坡位移变形进行预测。

1 灰色一马尔科夫模型

1.1 灰色 GM(1,1)模型

将位移监测数据作为灰色量,得到灰色序列,采用一阶微分方程的 GM(1,1)模型,由实际数据生成的 GM(1,1)模型的白化响应式为:

$$x^{(1)}(k+1) = [x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (1)$$

式中: a 为发展系数; b 为灰作用量。

灰色 GM(1,1)模型的预测值是按原有样本的规律产生的,而实际上预测值的产生应不受原有样本的影响。为此,在进行动态预测的同时,加入状态转移和步数,采用马尔科夫预测方法弥补灰色模型的不足。

1.2 马尔科夫预测方法

马尔科夫是一种依据当前事件状态预测未来时间段状态的一种模型,涉及状态、状态转移过程和相应的马尔科夫过程等相关概念。灰色一马尔科夫模型建立方法和步骤:

(1) 状态划分。依据灰色 GM(1,1)模型计算预测值与实测值的相对误差序列,据此划分 h 个状态区间:

$$E_i = [A_i, B_i] \quad (i=1, 2, \dots, i) \quad (2)$$

(2) 由状态 E_i 经过 k 步转移到状态 E_j 的次数记为 $n_{ij}(k)$,状态出现的次数记为 n_i ,则由状态 E_i 经过 k 步转移到状态 E_j 的概率见式(3)。该模型的转移概率与初始状态无关, $n \times n$ 阶的状态转移概率矩阵见式(4)。

$$p_{ij}(k) = \frac{n_{ij}(k)}{n_i} \quad (3)$$

$$p(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \cdots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \cdots & p_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \cdots & p_{nn}(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

(3) h 步状态转移概率矩阵是第一步状态转移概率矩阵的 h 次方,即:

$$p_{xy}^{(h)} = [p_{xy}^{(1)}]^h, h \geq 1 \quad (5)$$

综上,灰色一马尔科夫模型中增加了 GM(1,1)模型未考虑的动态转移因素,其状态转移、步数调整使该模型的预测过程更贴近边坡位移发生的真实情况,弥补了灰色 GM(1,1)模型的缺点,能大大减少 GM(1,1)模型的固有误差,提高长期预测精度,增加有效预测时间。

2 边坡位移变形预测实例

2.1 工程概况

怀新(怀化—新晃)高速公路 K1469+545—745

左侧边坡为整体挖方路基,边坡长 200 m、高约 60 m,为左高右低的单面坡。从上至下的主要地层结构如下:坡积亚黏土层,含少量砂砾;碎石层,局部夹亚黏土,呈松散或中密状;泥质细砂岩,完全风化成土;砾岩,为弱风化层。地质情况见图 1。

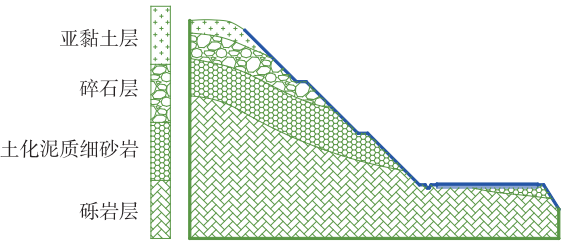


图 1 边坡地质结构示意图

该边坡高度较大,存在多处危岩,受雨水冲刷极

易造成失稳或滑塌。为此,针对其最高处、最不利位置进行监测,通过对监测数据的分析,运用灰色—马尔科夫模型对边坡位移变形进行预测,为制定加固措施提供参考。

2.2 预测结果

依据 2017 年 3 月 20—2018 年 3 月 15 日怀新高速公路 K1469+545—745 边坡位移监测数据,基于 GM(1,1)模型进行预测,计算实测值与预测值的相对误差(见表 1),并据此进行马尔科夫状态区间划分。GM(1,1)白化响应式的解为:

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=1\ 391.029e^{0.025k}-1\ 354.539\ 053 \tag{6}$$

由表 1 可知:实测值与 GM(1,1)模型预测值的

表 1 边坡位移实测数据及 GM(1,1)模型预测值

| 时间 | 实测值/ mm | 灰色拟 合值/mm | 相对误 差/% | 时间 | 实测值/ mm | 灰色拟 合值/mm | 相对误 差/% |
|------------|------------|--------------|------------|------------|------------|--------------|------------|
| 2017-03-20 | 28.85 | 28.85 | 0.00 | 2017-09-26 | 41.21 | 44.90 | -8.94 |
| 2017-03-30 | 30.16 | 28.34 | 6.03 | 2017-10-06 | 41.96 | 46.06 | -9.78 |
| 2017-04-09 | 31.25 | 29.08 | 6.94 | 2017-10-16 | 42.68 | 47.25 | -10.70 |
| 2017-04-19 | 32.24 | 29.83 | 7.49 | 2017-10-26 | 44.56 | 48.47 | -8.79 |
| 2017-04-29 | 32.99 | 30.60 | 7.25 | 2017-11-05 | 47.35 | 49.73 | -5.02 |
| 2017-05-09 | 33.38 | 31.39 | 5.96 | 2017-11-15 | 50.00 | 51.02 | -2.03 |
| 2017-05-19 | 33.86 | 32.20 | 4.89 | 2017-11-25 | 52.87 | 52.34 | 1.01 |
| 2017-05-29 | 34.39 | 33.04 | 3.93 | 2017-12-05 | 55.79 | 53.69 | 3.76 |
| 2017-06-08 | 34.76 | 33.89 | 2.48 | 2017-12-15 | 58.03 | 55.08 | 5.07 |
| 2017-06-18 | 35.20 | 34.77 | 1.21 | 2017-12-25 | 60.47 | 56.51 | 6.55 |
| 2017-06-28 | 35.78 | 35.67 | 0.29 | 2018-01-04 | 62.40 | 57.97 | 7.10 |
| 2017-07-08 | 36.49 | 36.59 | -0.29 | 2018-01-14 | 63.78 | 59.47 | 6.75 |
| 2017-07-18 | 37.10 | 37.54 | -1.19 | 2018-01-24 | 64.32 | 61.01 | 5.14 |
| 2017-07-28 | 37.61 | 38.51 | -2.40 | 2018-02-03 | 64.68 | 64.69 | -0.02 |
| 2017-08-07 | 38.44 | 39.51 | -2.79 | 2018-02-13 | 64.78 | 64.81 | -0.05 |
| 2017-08-17 | 39.22 | 40.53 | -3.35 | 2018-02-23 | 65.40 | 65.87 | -0.72 |
| 2017-08-27 | 40.03 | 41.58 | -3.88 | 2018-03-05 | 65.61 | 68.98 | -5.14 |
| 2017-09-06 | 40.34 | 42.66 | -5.76 | 2018-03-15 | 66.33 | 69.33 | -4.52 |
| 2017-09-16 | 40.92 | 43.76 | -6.95 | | | | |

相对误差最大为 7.49%,最小为-10.7%。因此,马尔科夫模型的相对误差范围为[-11,8]。据此将马尔科夫状态划分为 4 个区间(见表 2)。

根据表 1 和表 2 对边坡监测数据相对误差状态进行归类,结果见表 3。

表 2 马尔科夫状态划分区间

| 状态 | 状态界限 | 状态 | 状态界限 |
|----|-------------|----|----------|
| E1 | (-11%, -5%] | E3 | (0, 5%] |
| E2 | (-5%, 0] | E4 | (5%, 8%] |

表3 边坡监测数据相对误差状态归类结果

| 状态 | 监测时间 |
|----|---|
| E1 | 2017-09-06、2017-09-16、2017-09-26、2017-10-06、2017-10-16、2017-10-26、2017-11-05、2018-03-05 |
| E2 | 2017-07-08、2017-07-18、2017-07-28、2017-08-07、2017-08-17、2017-08-27、2017-11-15、2018-02-03、2018-02-13、2018-02-23 |
| E3 | 2017-03-20、2017-05-19、2017-05-29、2017-06-08、2017-06-18、2017-06-28、2017-11-25、2017-12-05 |
| E4 | 2017-03-30、2017-04-09、2017-04-19、2017-04-29、2017-05-09、2017-12-15、2017-12-25、2018-01-04、2018-01-14、2018-01-24 |

马尔科夫状态区间分为4个,因此式(5)中的 h 等于4,该模型的状态转移步数为4。依据式(3)~(5)得1~4步状态转移概率矩阵分别为:

$$p(1) = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/11 & 8/11 & 1/11 & 1/11 \\ 0 & 2/9 & 6/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/10 & 8/10 \end{bmatrix}$$

$$p(2) = \begin{bmatrix} 4/6 & 2/6 & 0 & 0 \\ 2/10 & 5/10 & 2/10 & 1/10 \\ 0 & 4/9 & 3/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 3/9 & 6/9 \end{bmatrix}$$

$$p(3) = \begin{bmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ 3/9 & 3/9 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 5/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1/10 & 5/10 & 4/10 \end{bmatrix}$$

$$p(4) = \begin{bmatrix} 2/6 & 2/6 & 2/6 & 0 \\ 4/9 & 2/9 & 0 & 3/9 \\ 0 & 5/8 & 1/8 & 2/8 \\ 0 & 2/10 & 6/10 & 2/10 \end{bmatrix}$$

马尔科夫状态划分为4个,故选择离预测时间(2018年3月15日)最近的4组数据进行预测,转移概率见表4。

由表4可知:状态1的概率最大,该边坡未来变形最可能处于状态1,故预测边坡变形为:

$$L = x^{(0)}(k+1)[1 + \bar{\delta}] \quad (7)$$

式中: $x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)$; $\bar{\delta} = (\delta_1 + \delta_2)/2$; δ_1 、 δ_2 分别为某一特定状态的上下限。

表4 状态预测计算结果

| 时间 | 起始状态 | 转移步数 | 状态转移概率 | | | |
|------------|------|------|--------|------|------|------|
| | | | E1 | E2 | E3 | E4 |
| 2018-02-03 | 2 | 4 | 4/9 | 2/9 | 0 | 1/3 |
| 2018-02-13 | 2 | 3 | 1/3 | 1/3 | 1/9 | 2/9 |
| 2018-02-23 | 2 | 2 | 1/5 | 1/2 | 1/5 | 1/10 |
| 2018-03-05 | 1 | 1 | 5/6 | 1/6 | 0 | 0 |
| 合计 | | | 1.81 | 1.22 | 0.31 | 0.66 |

2018年3月15日的边坡位移实测值为66.33 mm,灰色GM(1,1)模型的拟合预测值为69.33 mm,相对误差为-4.52%;采用灰色-马尔科夫模型进行预测, $k=37$,按式(7)计算,得边坡位移预测值为65.433 7 mm,相对误差为1.35%。两模型相对误差对比见表5和图2。

表5 两模型预测结果误差对比

| 时间 | 实测值/mm | GM(1,1)预测结果 | | 灰色-马尔科夫模型预测结果 | |
|------------|--------|-------------|---------|---------------|---------|
| | | 预测 | 相对误差/mm | 预测 | 相对误差/mm |
| | | 值/mm | 差/% | 值/mm | 差/% |
| 2017-07-08 | 36.49 | 36.49 | 0.00 | 36.49 | 0.00 |
| 2017-07-18 | 37.10 | 35.79 | -3.53 | 36.87 | -0.63 |
| 2017-07-28 | 37.61 | 36.71 | -2.39 | 37.81 | 0.54 |
| 2017-08-07 | 38.44 | 37.66 | -2.04 | 38.79 | 0.90 |
| 2017-08-17 | 39.22 | 38.63 | -1.51 | 39.79 | 1.44 |
| 2017-08-27 | 40.03 | 39.62 | -1.02 | 40.81 | 1.95 |
| 2017-09-06 | 40.34 | 40.64 | 0.74 | 39.42 | -2.28 |
| 2017-09-16 | 40.92 | 41.69 | 1.87 | 40.43 | -1.19 |
| 2017-09-26 | 41.21 | 42.76 | 3.76 | 41.48 | 0.64 |
| 2017-10-06 | 41.96 | 43.86 | 4.52 | 42.54 | 1.39 |
| 2017-10-16 | 42.68 | 44.99 | 5.40 | 43.64 | 2.24 |

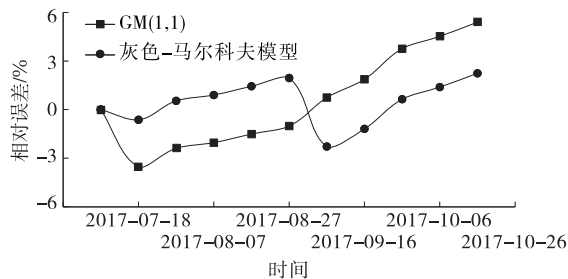


图2 两模型预测误差对比

由表5、图2可知:1)在预测时间内,GM(1,1)

模型预测值增加较快且预测时间较长时误差增大速率较快。2) 结合表1,GM(1,1)模型在第4个月时的拟合误差大于5%,超过允许值;而灰色—马尔科夫模型在预测时间内的相对误差为0~3%,其精度和预测时长均优于GM(1,1)模型。3) GM(1,1)模型在短时间内的预测精度满足要求,可对边坡位移进行短时间预测;灰色—马尔科夫模型在短期内的精度波动较小,其精度更稳定。

3 适宜预测时间分析

根据上述分析,灰色—马尔科夫模型预测值的相对误差较小,在预测时间内其精度比GM(1,1)模型高。但两者的预测停止时间长短有待考量。下面通过长期观测边坡位移分析灰色—马尔科夫模型预测时间长短,结果见表6。

表6 灰色—马尔科夫模型预测结果

| 天数/d | 时间 | 预测值/mm | 相对误差/% |
|------|------------|--------|--------|
| 120 | 2017-10-26 | 44.76 | 0.448 |
| ... | ... | ... | ... |
| | 2018-03-07 | 66.07 | 0.211 |
| 270 | 2018-03-17 | 67.43 | 0.522 |
| | 2018-03-27 | 68.26 | 0.515 |
| 290 | 2018-04-06 | 72.04 | 4.879 |

由表6可知:灰色—马尔科夫模型在9个月内的相对误差仍满足要求,但第290天的相对误差为4.879%,接近5%。考虑工程安全性,为确定该模型预测月位移量是否满足要求,由GM(1,1)模型计算结果进行修正得到灰色—马尔科夫模型的月位移预测量(见表7)。

表7 灰色—马尔科夫模型月位移预测量

| 时间 | 月位移量/mm | 时间 | 月位移量/mm |
|---------|---------|---------|---------|
| 2017-07 | 1.324 | 2017-12 | 3.227 |
| 2017-08 | 2.022 | 2018-01 | 2.987 |
| 2017-09 | 2.055 | 2018-02 | 2.212 |
| 2017-10 | 2.217 | 2018-03 | 2.190 |
| 2017-11 | 4.381 | | |

由表5~7可知:1) 采用GM(1,1)模型进行边坡位移预测,在第4个月时出现无效值,误差超过5%,不宜采用GM(1,1)模型进行4月后的位移预

测;2) 采用灰色—马尔科夫模型预测边坡位移,整体上误差增幅较小,在第9个月时误差接近5%,满足规范要求,考虑工程安全性,不宜采用灰色—马尔科夫模型进行9个月后的位移预测;3) 使用灰色—马尔科夫模型对该边坡进行第9个月位移预测,得到月位移量为4.381 mm,满足规范要求,该边坡在预测时间内稳定。

4 结论

(1) 灰色GM(1,1)、灰色—马尔科夫模型分别适宜短期和中长期预测。对于怀新高速公路K1469+545—745左侧边坡,GM(1,1)模型的适宜预测时间为4个月,灰色—马尔科夫模型的适宜预测时间为9个月。

(2) 边坡位移预测过程中,在预测时间内灰色—马尔科夫模型的预测精度高于GM(1,1)模型,且无失效值。

(3) 通过灰色—马尔科夫模型预测怀新高速公路K1469+545—745左侧边坡9个月内的位移,其相对误差和月位移量都满足规范要求,边坡在该预测期间内稳定性较好。

参考文献:

- [1] 孙健.光纤光栅位移传感器在边坡监测中的应用研究[J].工矿自动化,2014,40(2).
- [2] 李家春,马保成,田伟平,等.黄土地区公路边坡降雨失稳预报研究[J].中国地质灾害与防治学报,2010,21(3).
- [3] 张正虎,袁孟科,邓建辉,等.基于改进灰色—时序分析时变模型的边坡位移预测[J].岩石力学与工程学报,2014,33(增刊2).
- [4] 何成刚.马尔科夫模型预测方法的研究及其应用[D].合肥:安徽大学,2011.
- [5] 孙国凯,张成良.灰色—马尔科夫理论在隧道围岩变形预测中的应用[J].公路,2015(9).
- [6] 卫高明.坡形对路基边坡稳定性影响数值分析[J].兰州工业学院学报,2018,25(3).
- [7] 芮海田,吴群琪,袁华智,等.基于指数平滑法和马尔科夫模型的公路客运量预测方法[J].交通运输工程学报,2013,13(4).
- [8] 刘秀峰.GM(1,1)优化模型在变压器油中溶解气体浓度预测的应用研究[D].成都:西华大学,2013.

收稿日期:2018-07-17