

DOI:10.20035/j.issn.1671-2668.2025.01.018

引用格式:韦武谁,吴俊儒,阮仕锋,等.基于区间不确定性的预应力等效荷载研究[J].公路与汽运,2025,41(1):93-96.

Citation:WEI Wushui,WU Junru,RUAN Shifeng,et al.Research on equivalent prestressed load based on interval uncertainty [J].Highways & Automotive Applications,2025,41(1):93-96.

基于区间不确定性的预应力等效荷载研究

韦武谁¹,吴俊儒¹,阮仕锋¹,玉镇焯¹,罗瑞华¹,阳康²

(1.广西路建工程集团有限公司,广西南宁 530201;2.长沙理工大学 土木工程学院,湖南长沙 410114)

摘要:运用区间数基本定义和运算法则,基于预应力摩阻损失区间不确定性的基本特性,利用预应力筋微元体受力平衡条件,将预应力筋与管道之间的摩擦因数和管道偏差系数采用区间数表示,推导混凝土结构预应力等效荷载区间值计算公式,计算预应力区间不确定性影响下梁体预应力等效荷载区间值,并通过算例验证该算法在考虑预应力摩阻损失参数为区间数或固定值时的适用性。

关键词:桥梁;预应力;等效荷载;不确定性;区间数

中图分类号:U441.5

文献标志码:A

文章编号:1671-2668(2025)01-0093-04

预应力施工中普遍存在摩阻损失参数的不确定性,这些不确定性可能导致结构静态或动态响应产生较大偏差,量化这些不确定性对工程结构的影响是工程界迫切需要解决的问题之一^[1-2]。预应力混凝土结构受设计参数、张拉工艺、材料特性及环境因素影响必然存在一定预应力损失,导致结构中预加应力减少,对结构抗裂性、挠度等性能产生影响,进而导致桥梁的受力状态、结构静力和动力特性发生改变^[3-6]。一方面,导致预应力损失的因素较多,这些因素之间又相互影响,精确计算和测定预应力损失大小十分重要;另一方面,即使是同一结构,每束预应力的损失大小存在一定的不确定性,不会完全相同。因此,量化预应力损失的不确定性对结构性能的影响十分重要。

目前主要采用概率方法对不确定性结构的可靠性进行研究,该方法计算结果较精确,但需要大量参数统计样本构件参数的概率密度函数,在工程应用中存在较大困难^[7-8]。为克服概率方法的不足,Ben-Haim Y.等提出非概率可靠性的方法^[9-10],Moore R. E.等提出区间分析的概念^[11];韩志杰等将非概率可靠性理论用于吊梁可靠性验算^[12];陈旭勇利用区间模型分析钢筋混凝土梁非概率可靠性^[13];Zhao E. F.等使用凸集模型求解拱坝的非概率可靠性^[14];金波等针对含有同类型构件的多构件结构区间优化模型存在的区间扩张和计算量大的问题,提出将模

型转化为确定性优化模型并通过遗传算法求解的方法^[15];王印军等通过区间算法计算道钉位置与套筒扳手的相对误差区间^[16]。上述研究将区间算法用于实际工程评估,为摩阻损失区间不确定性下预应力内荷载区间研究奠定了基础。本文利用区间数描述预应力筋与管道之间的摩擦因数和管道偏差系数,利用混凝土微元体受力平衡条件,研究混凝土结构预应力等效荷载区间值的计算方法,为预应力混凝土梁非概率可靠性设计提供参考。

1 区间数及基本运算法则

已知区间变量或算子定义为:

$$[x]=[x_d, x_u]=[x_c-\Delta x, x_c+\Delta x] \quad (1)$$

式中: x_d, x_u 分别为区间数的下界和上界, $x_d=x_c-\Delta x, x_u=x_c+\Delta x$; x_c 为区间的中点,是区间的确定性部分, $x_c=(x_d+x_u)/2$; Δx 为区间半径,为参数的不确定性部分, $\Delta x=(x_u-x_d)/2$ 。

区间数的运算满足 Moore R. E.等提出的加、减、乘、除区间数四则运算法则^[11]:

$$\begin{cases} [x]+[y]=[x_d+y_d, x_u+y_u] \\ [x]-[y]=[x_d-y_u, x_u-y_d] \\ [x]\times[y]=[\min[x_d\times y_d, x_d\times y_u, x_u\times y_d, x_u\times y_u], \max[x_d\times y_d, x_d\times y_u, x_u\times y_d, x_u\times y_u]] \\ [x]\div[y]=[x_d, x_u]\times\left[\frac{1}{y_u}, \frac{1}{y_d}\right] \end{cases} \quad (2)$$

如果函数 $f(x, y, z, \dots)$ 是区间变量 x, y, z, \dots 的任意函数, 那么函数 f 的区间变化范围可由变量的区间运算计算得到, 如区间函数^[12]:

$$f([x], [y], [z]) = \frac{[x] + [y]}{[x] - [y]} [z] \quad (3)$$

设式(3)中 $[x] = [1, 2], [y] = [5, 10], [z] = [2, 4]$, 则有:

$$f = \frac{[1, 2] + [5, 10]}{[1, 2] - [5, 10]} [2, 4] = \frac{[6, 12]}{[-9, -3]} [2, 4] = \frac{[12, 48]}{[-9, -3]} = \left[-\frac{48}{9}, -\frac{12}{9} \right] \quad (4)$$

2 考虑预应力摩擦阻力的预应力内荷载分析

后张法预应力混凝土梁结构形成主要发生在预应力张拉时传力锚固阶段。在传力锚固阶段, 预应力筋受到张拉力作用, 在混凝土截面中建立预加内应力。预应力筋与混凝土的相互作用可分为三部分, 分别为预应力束端头对锚固区的直接作用力 F_A 和 F_B 、弯曲预应力束对管道的法向挤压力 q_r 、预应力束与管道的径向静摩擦力 q_θ 。图 1 为单端张拉预应力筋时混凝土受力示意图。

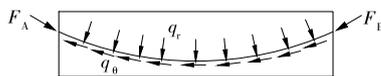


图 1 预应力内荷载示意图

为计算预应力筋与混凝土结构的相互作用, 以混凝土截面的中性轴为 x 轴、垂直于中性轴的梁截面为 y 轴建立直角坐标系, 预应力束在该坐标系中的表达式为 $e(x)$ 。将图 1 中沿预应力束的法向作用力 q_r 和径向静摩擦力 q_θ 在直角坐标系中进行正交分解, 得到图 2 所示受力示意图。

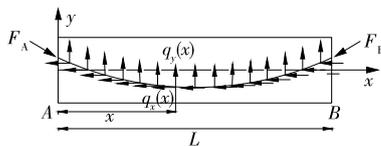


图 2 预应力内荷载直角坐标示意图

计算梁轴向内荷载 $q_x(x)$ 和竖向内荷载 $q_y(x)$ 在混凝土截面产生的内力, 可得到 x 截面处内力表达式:

$$N(x) = N_0 + \int_0^x q_x(t) dt \quad (5)$$

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q_y(t) dt \quad (6)$$

$$M(x) = M_0 + \int_0^x q_x(t) \cdot e(t) + q_y(t) \cdot (x - t) dt \quad (7)$$

式中: $N(x), Q(x), M(x)$ 分别为 x 截面处的压力、剪力和弯矩; N_0, Q_0, M_0 分别为混凝土截面处的初始压力、初始剪力和初始弯矩, 初始计算截面位于梁端时, 初始内力为预应力束端头对梁截面产生的等效内力。

计算时作如下假设和简化: 1) 预应力筋与孔道壁接触紧密; 2) 预应力筋与混凝土接触面上的摩擦阻力遵循库仑定律。

考虑到预应力筋与混凝土之间的相互作用, 取一微段梁体 dx , 将其中预应力束和混凝土体分别视为隔离体进行研究。预应力筋局部微元段 ds 的受力如图 3 所示, 其中预应力筋微元体 A 端和 B 端作用的预加力分别为 $F(x - dx/2)$ 和 $F(x + dx/2)$, 预应力筋微段受到的混凝土合力为向量 $q(x)$ 。

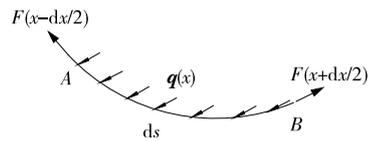


图 3 预应力筋微元段隔离体及受力状态示意图

根据预应力筋微元体平衡条件, 有:

$$F\left(x + \frac{dx}{2}\right) - F\left(x - \frac{dx}{2}\right) = dF(x) = q(x) ds \quad (8)$$

对式(8)进行简化, 得:

$$q(x) = \frac{dF(x)}{ds} \quad (9)$$

如图 4 所示, 将预应力筋微元段受到的混凝土合力 $q(x)$ 沿预应力筋法向和切向进行分解, 则 $q(x)$ 可写为:

$$q(x) = q_\theta(x) i + q_r(x) j \quad (10)$$

式中: i 和 j 分别为微元段 ds 沿弧段切向和法向的单位向量。

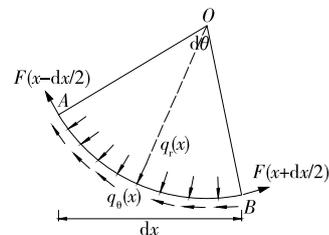


图 4 预应力筋微元段隔离体受力分解示意图

考虑到 $dF(x)$ 位于 B 端点, 且与 B 点处的切

向方向一致,将式(10)改写为:

$$\mathbf{q}(x) = \frac{d(F(x)\mathbf{i})}{ds} = \frac{dF(x)}{ds}\mathbf{i} + \frac{F(x)}{ds}d\mathbf{i} \quad (11)$$

设该预应力筋微元段 ds 的曲率为 c ,由几何关系得:

$$\frac{d\mathbf{i}}{ds} = c \cdot \mathbf{j} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),得:

$$\mathbf{q}(x) = \frac{d(F(x)\mathbf{i})}{ds} = \frac{dF(x)}{ds}\mathbf{i} + cF(x)\mathbf{j} \quad (13)$$

比较式(13)和式(10)的系数项,得到切向分力与法向分力表达式:

$$q_\theta(x) = \frac{dF(x)}{ds} \quad (14)$$

$$q_r(x) = cF(x) \quad (15)$$

假设预应力筋和混凝土间摩擦力大小与压力成正比,可建立法向作用力 $q_r(x)$ 与切向作用力 $q_\theta(x)$ 的关系:

$$q_\theta(x) = \mu q_r(x) \quad (16)$$

式中: μ 为预应力孔道对预应力筋的孔道摩擦因数。

同时考虑孔道非理想平顺,局部曲率存在正负偏差,引入预应力筋与管道之间的管道偏差系数 k ,设平均偏差曲率半径为 R_2 ,并令 $k = \mu/R_2$,式(16)可写为:

$$q_\theta(x) = (c\mu + k)F(x) \quad (17)$$

由预应力引起的内荷载一般表达式为:

$$\mathbf{q}(x) = (\mu c + k)F(x)\mathbf{i} + cF(x)\mathbf{j} \quad (18)$$

设预应力筋为平面曲线方程 $y = f(x)$,则 x 处的曲率为:

$$c = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad (19)$$

将 $\mathbf{q}(x)$ 在水平方向和垂直方向进行分解,得:

$$\mathbf{q}(x) = q_x(x)dx + q_y(x)dy \quad (20)$$

由于力向量无论在何种坐标系必然是相同的,利用坐标变换关系得:

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \cos \alpha dx + \sin \alpha dy \\ \mathbf{j} = \sin \alpha dx - \cos \alpha dy \end{cases} \quad (21)$$

式中: α 为曲线 $y = f(x)$ 在 x 处的切向水平角, $\alpha = \arctan y'$ 。

将式(21)代入式(10)并化简,得:

$$\mathbf{q}(x) = [q_\theta(x)\cos \alpha + q_r(x)\sin \alpha]dx + [q_y(x)\sin \alpha - q_r(x)\cos \alpha]dy \quad (22)$$

比较式(20)和式(22)的系数项,得:

$$q_x(x) = q_\theta(x)\cos \alpha + q_r(x)\sin \alpha \quad (23)$$

$$q_y(x) = q_\theta(x)\sin \alpha - q_r(x)\cos \alpha$$

将式(15)和式(17)代入式(23),得到考虑摩擦阻力的节间预应力束横向内载集度[见式(24)]、考虑摩擦阻力的节间预应力束竖向内载集度[见式(25)]。

$$q_x(x) = (c\mu + k)F(x)\cos \alpha + cF(x)\sin \alpha \quad (24)$$

$$q_y(x) = (c\mu + k)F(x)\sin \alpha - cF(x)\cos \alpha \quad (25)$$

考虑到摩擦因数 μ 和管道偏差系数 k 存在一定的区间不确定性,引入区间数,得:

$$\begin{cases} q_x(x) = (c[\mu] + [k])F(x)\cos \alpha + cF(x)\sin \alpha \\ q_y(x) = (c[\mu] + [k])F(x)\sin \alpha - cF(x)\cos \alpha \end{cases} \quad (26)$$

式(26)即为平面直角坐标系下考虑预应力区间不确定性的预应力等效荷载计算公式。

3 算例与分析

以图 5 所示预应力简支梁为例,利用上述算法分别计算不考虑、考虑预应力区间不确定性时预应力等效荷载。预应力筋两端集中力为 F 。

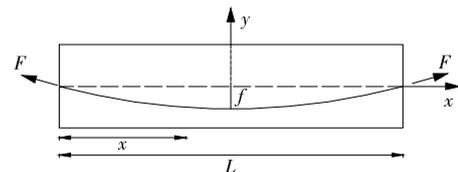


图 5 抛物线形预应力筋示意图

设预应力筋呈抛物线形设置,坐标布置在梁的中点位置,顶点矢高为 f ,梁长为 L ,令 $m = L^2/(8f)$,则方程 $y = e(x)$ 可表示为:

$$y = \frac{2}{m}x^2 - f \quad (27)$$

式(26)第二项可简化为:

$$q_y(x) = (c[\mu] + [k])F(x)\sin \alpha - cF(x)\cos \alpha = \left[\frac{[\mu]m^2}{(m^2 + x^2)^2} + \frac{[k]}{(m^2 + x^2)^{1/2}} \right]x F(x) - \frac{m^3}{(m^2 + x^2)^2} F(x) \quad (28)$$

算例 1: 不考虑摩擦阻损失和预应力筋与孔道之间的管道偏差系数影响时,式(25)的竖向荷载 $q_y(x)$ (节间荷载)可简化为:

$$q_y(x) = -cF(x)\cos\alpha = -\frac{y''}{(1+y'^2)^2}F(x) = -\frac{m^3}{(m^2+x^2)^2}F(x) \quad (29)$$

式(29)表明,预应力筋呈二次抛物线布置,且不考虑摩擦损失与管道偏差系数时,节间等效荷载为常数。参考文献[17],设预加力为 1 200 kN, $f = 750$ mm, $L = 5\ 000$ mm, $e_1 = e_2 = 100$ mm, 计算得简支梁中点 $q_y(0) = 288$ kN/m, 简支梁两个端点 $q_y(L/2) = 156$ kN/m。

算例 2: 考虑混凝土和预应力筋之间的摩擦因数 μ 及管道偏差系数 k 的区间不确定性, 引入摩擦因数的区间数 $[\mu] = [0.00, 0.15]$ 、管道偏差系数的区间数 $[k] = [0.00, 0.05]$, 则式(25)可写为:

$$q_y(x) = \left[\frac{[\mu]m^2}{(m^2+x^2)^2} + \frac{[k]}{(m^2+x^2)^{1/2}} \right] \cdot xF(x) - \frac{m^3}{(m^2+x^2)^2}F(x) \quad (30)$$

由式(30)可得简支梁中点荷载 $q_y(0) = 288$ kN/m ($x=0$), 简支梁两端点的荷载为 $[107, 156]$ kN/m。

4 结语

本文基于材料力学基本原理, 利用预应力混凝土微元体平衡条件, 推导考虑预应力摩阻损失的预应力内荷载计算公式。考虑预应力梁管道摩阻损失不确定性的特点, 将预应力筋与孔道之间的摩擦因数 μ 和管道偏差系数 k 表示为区间数, 得到混凝土结构预应力等效荷载区间值的计算方法。算例分析结果表明, 该算法既可用于预应力摩阻损失参数有准确数据时的预应力等效荷载计算, 也可用于预应力摩阻损失为区间数时预应力等效荷载区间值计算。

参考文献:

- [1] 苏静波, 邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望[J]. 力学进展, 2005, 35(3): 338-344.
[2] 陈常松, 王强. 斜拉桥 PC 箱梁管道摩阻系数影响分

- 析[J]. 交通科学与工程, 2019, 35(3): 38-42+84.
[3] 罗雷. 连续刚构桥下挠影响因素及对结构受力的影响分析[J]. 公路与汽运, 2024, 40(5): 147-150.
[4] 张智, 王达, 谭本坤, 等. 基于影响矩阵的矮塔斜拉桥主梁预应力损失识别方法[J/OL]. 交通科学与工程, 1-8[2024-12-30]. <https://doi.org/10.16544/j.cnki.cn43-1494/u.20231213002>.
[5] 刘寒冰, 罗国宝, 吴春利. 简支桥梁预应力损失计算方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(11): 1510-1513.
[6] 陈才, 路鑫. 连续刚构桥悬臂施工阶段预拱度曲线拟合研究[J]. 公路与汽运, 2023(5): 120-123.
[7] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
[8] 邱志平, 王靖. 不确定参数结构特征值问题的概率统计方法和区间分析方法的比较[J]. 航空学报, 2007, 28(3): 590-592.
[9] BEN-HAIM Y, ELISHAKOFF I. Convex models of uncertainty in applied mechanics [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1990.
[10] BEN-HAIM Y. A non-probabilistic concept of reliability[J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 227-245.
[11] MOORE R E, KEARFOTT R B, CLOUD M J. Introduction to interval analysis [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
[12] 韩志杰, 王璋奇. 基于区间有限元的吊梁非概率可靠性研究及敏感性分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2012, 43(5): 1746-1752.
[13] 陈旭勇. 基于非概率理论模型的在役 RC 桥梁可靠性研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2010.
[14] ZHAO E F, WU C Q. Long-term safety assessment of large-scale arch dam based on non-probabilistic reliability analysis[J]. Structures, 2021, 32: 298-312.
[15] 金波, 刘正波, 方琪洪, 等. 含同类构件的多构件结构区间不确定性优化[J]. 铁道科学与工程学报, 2021, 18(3): 728-736.
[16] 王印军, 何大勇, 王锡锋. 道钉螺栓位置误差区间计算及应用研究[J]. 工程机械, 2023, 54(6): 141-145.
[17] 牛黎明. 预应力等效荷载计算方法研究[J]. 交通科技, 2012(5): 12-14.

收稿日期: 2023-01-05